

HEINRICH-HERTZ-INSTITUT FÜR SCHWINGUNGSFORSCHUNG
BERLIN-CHARLOTTENBURG

Technischer Bericht Nr. 16

Einige Eigenschaften der Mathieu'schen
und verwandten Funktionen,
dargestellt am Beispiel des Rückmischverfahrens

Dr. Ing. HEINZ JUNGFER

1 9 5 7

Technischer Bericht Nr. 16

Einige Eigenschaften der MATHIEU'schen und verwandten Funktionen, dargestellt am Beispiel des Rückmischverfahrens.

Zusammenfassung

Wird bei einem Frequenzteiler nach dem Rückmischverfahren die geteilte Frequenz über einen Tiefpass unmittelbar wieder der Mischstufe zugeführt, so ergibt sich ein 2 : 1-Teiler mit grossem Frequenzbereich. Das Verhalten dieser Anordnung wird - auch mit Berücksichtigung der Dämpfung - berechnet; es lässt sich durch die MEISSNER'sche bzw. MATHIEU'sche Differentialgleichung beschreiben. Die experimentelle Untersuchung der Schwingbereiche und der Kurvenform der erzeugten Schwingung zeigt eine bemerkenswert gute Übereinstimmung mit der Rechnung. Es erscheint daher aussichtsreich, das Rückmischverfahren als Analogierechner für die genannten u.ä. Differentialgleichungen, wie z.B. die HILL'sche, zu verwenden.

Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung

Der Bearbeiter

gez: Jungfer

(Dr.-Ing. H. Jungfer)

Der Abteilungsleiter

gez: Gundlach

(Prof. Dr.-Ing. F.W. Gundlach)

Der Institutsdirektor

gez: Gundlach

(Prof. Dr.-Ing. F.W. Gundlach)

Berlin - Charlottenburg, den 1. Oktober 1957

Allgemeines

Zur Frequenzwandlung, insbesondere zur Frequenzteilung wird seit einiger Zeit das sogenannte Rückmischverfahren gern angewendet. Dabei wird, wie in Bild 1 grundsätzlich gezeigt ist, die zu teilende Frequenz f_e zunächst dem Eingang einer Mischstufe zugeführt. Die geteilte Frequenz f_a erhält man dann am Ausgang der

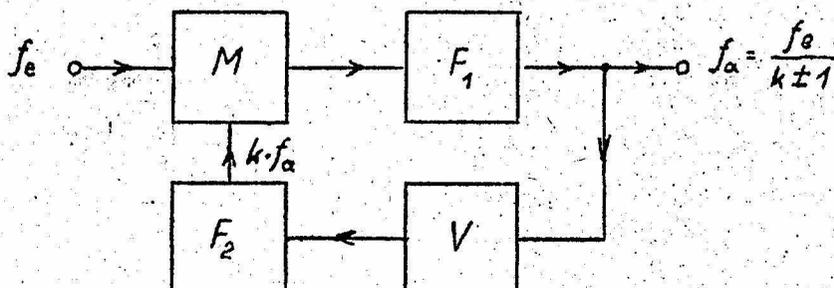


Bild 1. Grundsätzliches Schaltbild des Rückmischverfahrens.

Mischstufe über das Filter F_1 als Differenzfrequenz der Eingangsfrequenz und einer weiteren der Mischstufe zugeführten Frequenz, die aus der Ausgangsfrequenz f_a selbst durch Vervielfachung um den Faktor k gewonnen wird. Der Vervielfacher besteht häufig aus einem Verzerrer V und einem Filter F_2 , mit dem die k -te Harmonische der Ausgangsfrequenz herausgesiebt wird. Das Frequenzverhältnis oder die Teilungszahl ergibt sich dann aus

$$t = \frac{f_e}{f_a} = k \pm 1 \quad (1)$$

Hierbei gilt das obere Vorzeichen für den Fall, dass die vervielfachte Frequenz kleiner ist als die Eingangsfrequenz. Das ist der meist übliche Betriebsfall. Das untere Vorzeichen gilt für den umgekehrten Fall. Ueber die Wirkungsweise und den Aufbau derartiger Rückmischteiler ist schon mehrfach berichtet worden [1, 2, 3, 4]. In all diesen Arbeiten wird das Rückmischverfahren zur Teilung nur einer einzigen Frequenz bzw. eines äusserst schmalen Frequenzbereiches beschrieben. Daher entsteht leicht der Eindruck, als ob nach diesem Verfahren eine sich in

einem grösseren Bereich ändernde Frequenz nicht geteilt werden kann. Bildet man jedoch die Filter F_1 und F_2 nicht wie üblich als selektive Schwingkreise aus, sondern verwendet man beispielsweise Bandpässe oder noch einfacher Tiefpässe, mit denen die Summenfrequenz unterdrückt wird, so ergeben sich Frequenzteiler mit grösserem Frequenzbereich. Eine einfache Ueberlegung zeigt, dass der ausnutzbare Frequenzbereich umso grösser wird, je kleiner der Vervielfachungsfaktor k und damit auch die Teilungszahl t gewählt wird. Verzichtet man ganz auf eine Vervielfachung und führt die Ausgangsfrequenz unmittelbar auf den zweiten Eingang des Rückmischteilers zurück, wie es in Bild 2 gezeigt ist, so erhält man einen Teiler mit dem Teilverhältnis $2 : 1$, der einige besonders interessante Eigenschaften aufweist.

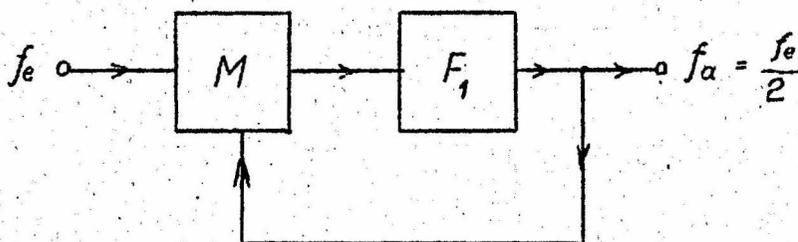


Bild 2. Grundsätzliches Schaltbild eines Rückmischteilers mit dem Teilverhältnis $2 : 1$.

Rechnerische Behandlung des Rückmischverfahrens

Man versteht die Wirkungsweise des Rückmischverfahrens am leichtesten, wenn man sich die ganze Anordnung als einen Rückkopplungsgenerator für die Ausgangsfrequenz f_a vorstellt. Die Rückkopplungsschleife wird dabei durch den Weg: Ausgangsklemmen, Tiefpass, Mischstufe, Ausgangsklemmen gebildet. In dieser Schleife ist die Verstärkung der Mischstufe enthalten. Sie ist in der Regel von der Grösse der Eingangsspannung U_e abhängig und ist insbesondere bei verschwindender Eingangsspannung Null, Durch Aendern der Eingangsspannung kann daher bei sonst ausreichender, konstanter Verstärkung die zur Selbsterregung erforderliche Schleifenverstärkung 1 eingestellt werden. Bei konstanter Eingangsspannung kann dies aber auch durch einen/beliebiger Stelle der Rückkopplungsschleife liegenden regelbaren Verstärker erreicht werden.

a.) Rechteckige Eingangsspannung, keine Dämpfung

Zur rechnerischen Behandlung werde die Aufgabe zunächst, wie Bild 3 zeigt, etwas vereinfacht. Als Mischstufe werde ein

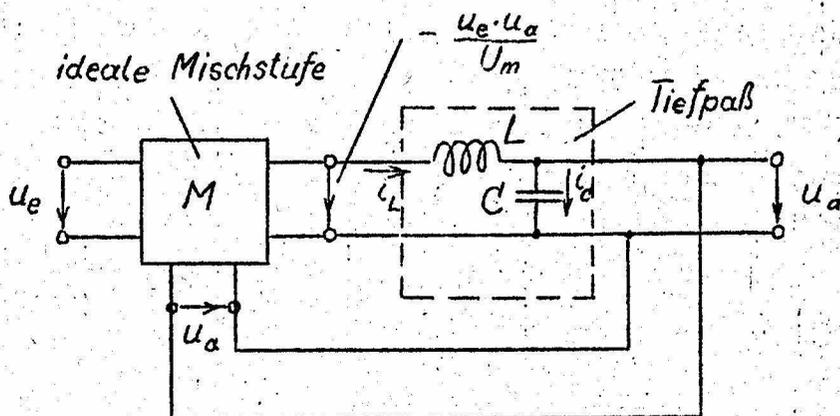


Bild 3. Vereinfachtes Schaltbild eines 2 : 1 =
Teilers mit L-C = Tiefpaß.

ideales Mischorgan vorausgesetzt, das heisst ein solches, dessen Ausgangsspannung genau proportional dem Produkt der beiden Eingangsspannungen ist, $u = - \frac{u_e \cdot u_a}{U_m}$ ^{*)} Die Pro-

portionalitätskonstante sei durch U_m gekennzeichnet. U_m hat die Dimension einer Spannung und ist ein Mass für den Kehrwert der Mischverstärkung. Ferner sei angenommen, dass die Ausgangsspannung nicht von der Belastung abhängt, das heisst also, dass der Innenwiderstand der Ausgangsklemmen praktisch gleich Null sein möge. Als Tiefpaß werde ein einfaches L - C - Glied verwendet, dessen Verluste zunächst vernachlässigt werden sollen. Die am Kondensator entstehende Spannung wird dem zweiten, hochohmig gedachten Eingang der Mischstufe zugeführt.

Mit den Bezeichnungen und Pfeilrichtungen des Bildes 3 ergeben sich dann folgende Beziehungen:

*) Das negative Vorzeichen in obiger Gleichung ist an sich ohne Bedeutung. Es wurde nur gewählt, um später auch in formaler Hinsicht eine vollkommene Uebereinstimmung mit anderen Darstellungen [5, 6] zu erhalten; ausserdem ist auch, wenn beispielsweise eine Elektronenröhre als Mischorgan verwendet wird, deren Ausgangsspannung proportional $-u_e \cdot u_a$.

$$i_L = i_C = C \frac{du_a}{dt} \quad (2)$$

$$-\frac{u_e \cdot u_a}{U_m} = L \frac{di_L}{dt} + u_a = LC \frac{d^2 u_a}{dt^2} + u_a \quad (3)$$

Führt man noch die Resonanzfrequenz des Tiefpasses $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ein, so erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u_a}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \left(1 + \frac{u_e}{U_m}\right) u_a = 0 \quad (4)$$

Ist die Eingangsspannung u_e eine rein sinusförmige Wechselspannung, so folgt mit

$$u_e = U_e \cos \omega_e t \quad (5)$$

$$\frac{d^2 u_a}{dt^2} + \omega_0^2 \left(1 + \frac{U_e}{U_m} \cos \omega_e t\right) u_a = 0 \quad (6)$$

Dies ist eine Gleichung vom Typ der Mathieu'schen Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (\lambda + \gamma \cos x) y = 0.$$

Ihre Lösung ist bekannt [7, 8], soll aber erst etwas später für den hier vorliegenden Fall diskutiert werden. Statt dessen soll zunächst, weil sich das Wesentliche dann leichter übersehen lässt, für die Eingangsspannung ein rechteckförmiger Verlauf angenommen werden. Es sei also

$$u_e = + U_e \quad \text{für } 0 \leq \omega_e t \leq \pi \quad (7)$$

und

$$u_e = - U_e \quad \text{für } \pi \leq \omega_e t \leq 2\pi$$

bzw. für $-\pi \leq \omega_e t \leq 0$.

Damit ist

$$\frac{d^2 u_a}{dt^2} + \omega_0^2 \left(1 \pm \frac{U_e}{U_m}\right) u_a = 0 \quad (8)$$

Diese Gleichung ist als Meissner'sche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (\lambda \pm \gamma) y = 0$$

bekannt [9]. Der Lösungsweg soll, soweit es für das Verständnis des folgenden erforderlich ist, hier noch einmal kurz angegeben und durch zusätzliche Betrachtungen gegenüber dem bisher Bekannten erweitert werden.

Wir unterscheiden zunächst zwei Fälle:

Fall A. $U_e \leq U_m$.

Dann ist der Klammerausdruck in Gleichung (8) stets positiv. Die Lösung ist daher sowohl in der positiven wie auch in der negativen Halbperiode der Rechteckeingangsspannung durch eine cos-sin-Funktion darstellbar. Sie kann also angeschrieben werden in der Form

$$u_p = C_p \cos \omega_p t + S_p \sin \omega_p t \quad (9a)$$

mit $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 + U_e/U_m}$ für die positive Hälfte der Periode der Eingangsspannung ($0 \leq \omega_e t \leq \pi$),

$$u_n = C_n \cos \omega_n t + S_n \sin \omega_n t$$

mit $\omega_n = \omega_0 \sqrt{1 - U_e/U_m}$ für die negative Periodenhälfte ($\pi \leq \omega_e t \leq 2\pi$ bzw. $-\pi \leq \omega_e t \leq 0$).

C_p , S_p , C_n und S_n , die Amplituden der betreffenden cos- und sin-Funktionen, sind Konstanten, die noch bestimmt werden müssen.

Fall B. $U_e \geq U_m$.

Dann ist die Klammer in der positiven Halbperiode positiv, in der negativen Halbperiode negativ. Die Lösung ist also in der positiven Periodenhälfte wiederum durch eine cos-sin-Funktion, in der negativen aber durch eine $\cos = \sin$ -Funktion gegeben. Sie lautet also

$$u_p = C_p \cos \omega_p t + S_p \sin \omega_p t \quad (10a)$$

mit $\omega_p = \omega_0 \sqrt{U_e/U_m + 1}$ für die positive
Periodenhälfte,

$$u_n = C_n \cos \omega_n t + S_n \sin \omega_n t \quad (10b)$$

mit $\omega_n = \omega_0 \sqrt{U_e/U_m - 1}$ für die negative
Periodenhälfte.

Die Konstanten C_p , S_p , C_n und S_n der Gleichungen (9) und (10) gewinnt man aus folgender Ueberlegung.

Die resultierende Schwingung setzt sich aus zwei Teilschwingungen, die zeitlich aneinandergereiht werden, zusammen. Daher müssen zunächst einmal die beiden Teillösungen an der Grenzstelle beider Lösungen übereinstimmen. Ausserdem aber darf aus physikalischen Gründen, da zwei Energiespeicher vorhanden sind, die Spannungskurve an dieser Stelle keinen Knick aufweisen. Ferner muss nach dem Ablauf einer vollen Periode der Eingangsspannung, wenn der Rückmischteiler an seinem Ausgang eine stationäre Schwingung liefern soll - was wir ja erwarten - der Betrag der Ausgangsspannung der gleiche sein, wie am Beginn der Periode; wäre er grösser oder kleiner, so hätten wir es mit einer sich aufschaukelnden oder mit einer abklingenden Schwingung zu tun^{*}). Hinsichtlich der Differenzierbarkeit der Spannungskurve an dieser Stelle gilt die gleiche Ueberlegung wie vorher.

Damit ergeben sich, wenn man noch zweckmässigerweise die Periode der Eingangsspannung von $-\pi$ bis $+\pi$, die Teilschwingung u_n also von $-\pi$ bis 0 und u_p von 0 bis $+\pi$ verlaufen lässt, folgende Beziehungen:

$$(u_p)_{\omega_e t = 0} = (u_n)_{\omega_e t = 0} \quad (11a)$$

$$\frac{du_p}{dt} \Big|_{\omega_e t = 0} = \frac{du_n}{dt} \Big|_{\omega_e t = 0} \quad (11b)$$

^{*}) Mathematisch schärfer formuliert ist diese Bedingung zum Beispiel in [7]; sog. Floquet'sches Theorem.

$$(u_p)_{\omega_e t} = \pi = \pm (u_n)_{\omega_e t} = -\pi \quad , \quad (11c)$$

$$\frac{du_p}{dt} \omega_e t = \pi = \pm \frac{du_n}{dt} \omega_e t = -\pi \quad . \quad (11d)$$

Das obere, positive Vorzeichen in den Gleichungen (11c) und (11d) bedeutet, dass die resultierende Schwingung sich nach einer vollen Periode der Eingangsspannung genau wiederholt; man nennt die sich ergebenden Lösungen auch die ganzperiodischen Lösungen. Das untere, negative Vorzeichen zeigt an, dass die resultierende Schwingung am Ende einer vollen Periode zwar den gleichen Ausschlag wie beim Beginn der Periode, aber nach der entgegengesetzten Richtung ausführt. Die resultierende Schwingung hat also erst nach zwei vollen Perioden der Eingangsspannung den gleichen Zustand wie am Anfang. Die Rechnung führt in diesem Fall auf sogenannte halbperiodische Lösungen.

In den Gleichungen (9) und (10) ist die Abhängigkeit der Frequenzen ω_p und ω_n von der Eingangsspannung U_e angegeben. Es gibt jedoch, wie man sich aus der Anschauung heraus leicht klar machen kann, nur ganz bestimmte Wertepaare ω_p ; ω_n , die auch gleichzeitig die Grenzbedingungen (11) erfüllen. Man findet diese Wertepaare, indem man die Konstanten C_p , S_p , C_n und S_n aus den auf Grund der Grenzbedingungen aufgestellten Gleichungen eliminiert.

Aus (11a) folgt sogleich

$$C_n = C_p \quad (12)$$

aus (11b)

$$S_n = \frac{\omega_p}{\omega_n} S_p \quad . \quad (13)$$

Setzt man diese in (11c) und (11d) ein, so folgt für den Fall A

$$C_p \left(\cos \frac{\omega_p}{\omega_e} \pi \mp \cos \frac{\omega_n}{\omega_e} \pi \right) + S_p \left(\sin \frac{\omega_p}{\omega_e} \pi \pm \frac{\omega_p}{\omega_n} \sin \frac{\omega_n}{\omega_e} \pi \right) = 0 \quad (14a)$$

$$C_p \left(-\sin \frac{\omega_p}{\omega_e} \pi \mp \frac{\omega_n}{\omega_p} \sin \frac{\omega_n}{\omega_e} \pi \right) + S_p \left(\cos \frac{\omega_p}{\omega_e} \pi \mp \cos \frac{\omega_n}{\omega_e} \pi \right) = 0 \quad (14b)$$

Eliminiert man hieraus weiter C_p und S_p , so ergibt sich, wenn noch zur Abkürzung

$$\frac{\omega_p}{\omega_e} \pi = p \quad (15a)$$

$$\frac{\omega_n}{\omega_e} \pi = n \quad (15b)$$

gesetzt wird,

$$1 \pm \frac{1}{2} \left(\frac{n}{p} + \frac{p}{n} \right) \sin p \cdot \sin n - \cos p \cdot \cos n = 0 \quad (16)$$

Nach kurzer Zwischenrechnung, in der die Beziehungen $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ und $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ eingeführt werden, folgt für den Fall, dass das obere Vorzeichen der Gleichungen (11c) und (11d) benutzt wurde,

$$\frac{\operatorname{tg} n/2}{\operatorname{tg} p/2} + \frac{\operatorname{tg} p/2}{\operatorname{tg} n/2} + \frac{n}{p} + \frac{p}{n} = 0 \quad (17)$$

mit den beiden Lösungen

$$1. \quad \frac{\operatorname{tg} n/2}{\operatorname{tg} p/2} = -\frac{n}{p} \quad 2. \quad \frac{\operatorname{tg} n/2}{\operatorname{tg} p/2} = -\frac{p}{n} \quad (18a, b)$$

und für den Fall, dass das untere Vorzeichen der Gleichungen (11c) und (11d) benutzt wurde,

$$\operatorname{tg} \frac{n}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg} n/2 \cdot \operatorname{tg} p/2} - \left(\frac{n}{p} + \frac{p}{n} \right) = 0 \quad (19)$$

mit den beiden Lösungen

$$1. \quad \operatorname{tg} \frac{n}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p}{2} = \frac{n}{p} \quad 2. \quad \operatorname{tg} \frac{n}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p}{2} = \frac{p}{n} \quad (20a, b)$$

Entsprechend ergibt sich für den Fall B aus (11c) und (11d)

$$C_p \left(\cos \frac{\omega_p}{\omega_e} \pi \mp \operatorname{tg} \frac{\omega_n}{\omega_e} \pi \right) + S_p \left(\sin \frac{\omega_p}{\omega_e} \pi \pm \frac{\omega_p}{\omega_n} \operatorname{tg} \frac{\omega_n}{\omega_e} \pi \right) = 0 \quad (21a)$$

$$C_p \left(-\sin \frac{\omega_p}{\omega_e} \pi \pm \frac{\omega_n}{\omega_p} \operatorname{tg} \frac{\omega_n}{\omega_e} \pi \right) + S_p \left(\cos \frac{\omega_p}{\omega_e} \pi \mp \operatorname{tg} \frac{\omega_n}{\omega_e} \pi \right) = 0 \quad (21b)$$

Auf dem gleichen Wege wie vorher findet man bei Benutzung des oberen Vorzeichens

$$\frac{\sqrt{q} \cdot n/2}{\operatorname{tg} p/2} - \frac{\operatorname{tg} p/2}{\sqrt{q} \cdot n/2} + \frac{n}{p} - \frac{p}{n} = 0 \quad (22)$$

mit den beiden Lösungen

$$1. \quad \frac{\sqrt{q} \cdot n/2}{\operatorname{tg} p/2} = - \frac{n}{p} \qquad 2. \quad \frac{\sqrt{q} \cdot n/2}{\operatorname{tg} p/2} = \frac{p}{n} \quad (23a, b)$$

und bei Benutzung des unteren Vorzeichens

$$\sqrt{q} \cdot \frac{n}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p}{2} - \frac{1}{\sqrt{q} \cdot n/2 \cdot \operatorname{tg} p/2} - \left(\frac{n}{p} - \frac{p}{n} \right) = 0 \quad (24)$$

mit den beiden Lösungen

$$1. \quad \sqrt{q} \cdot \frac{n}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p}{2} = \frac{n}{p} \qquad 2. \quad \sqrt{q} \cdot \frac{n}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p}{2} = - \frac{p}{n} \quad (25a, b)$$

Aus den transzendenten Gleichungen (18), (20), (23) und (25) können nun die zusammengehörigen Werte von ω_p und ω_n berechnet werden. Sie gelten für einen bestimmten Wert der Eingangswchselspannung, der aus Gleichung (9a), bzw. (9b) folgt.

In Bild 4a und 4b ist die Abhängigkeit der beiden Frequenzen ω_p und ω_n von der Eingangswchselspannung, bzw. der resultierenden Verstärkung dargestellt. Zur Verallgemeinerung ist ω_p und ω_n auf die Eingangsfrequenz ω_e und U_e auf die Konstante U_m bezogen. Der Abszissenmasstab ist so eingeteilt, dass er für $0 \leq U_e/U_m \leq 1$ linear ist und für $1 \leq U_e/U_m \leq \infty$ nach einem reziproken Gesetz verläuft.

Bild 4a zeigt den Zusammenhang für den Fall, dass das obere Vorzeichen der Gleichungen (11c) und 11d) benutzt wurde.

Die Kurven entspringen für verschwindende Erregung bei den Werten $\omega_p/\omega_e = \omega_n/\omega_e = 1, 2, 3, \dots$ und werden deshalb als ganzperiodische Lösungen bezeichnet; sie enden für U_e/U_m ungefähr bei den Werten 1,5 oder 2,5 usw., je nachdem, ob die Lösung 1 (hierfür gelten die ausgezogenen Kurven in Bild 4a) oder Lösung 2 (die gestrichelten Kurven) verwendet wurde.

Während ω_p/ω_e mit wachsendem U_e/U_m beständig steigt, nimmt ω_n/ω_e zunächst bis auf Null ab (bei $U_e/U_m = 1$) und steigt erst dann auf den gleichen Endwert wie ω_p/ω_e .

In Bild 4b ist zur Berechnung das untere Vorzeichen von (11c) und (11d) eingesetzt worden. Diese Kurven beginnen bei den Werten $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ und werden deshalb halbperiodische Lösungen genannt. Ihr übriger Verlauf ist ähnlich dem eben besprochenen.

Um Anschluss an bekannte Darstellungen zu gewinnen, sollen die abgeleiteten Beziehungen noch etwas anders dargestellt werden. Als Abszisse werde

$$\lambda = \left(\frac{\omega_o}{\omega_e}\right)^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\omega_p}{\omega_e}\right)^2 \mp \left(\frac{\omega_n}{\omega_e}\right)^2 \right] \quad (26a)$$

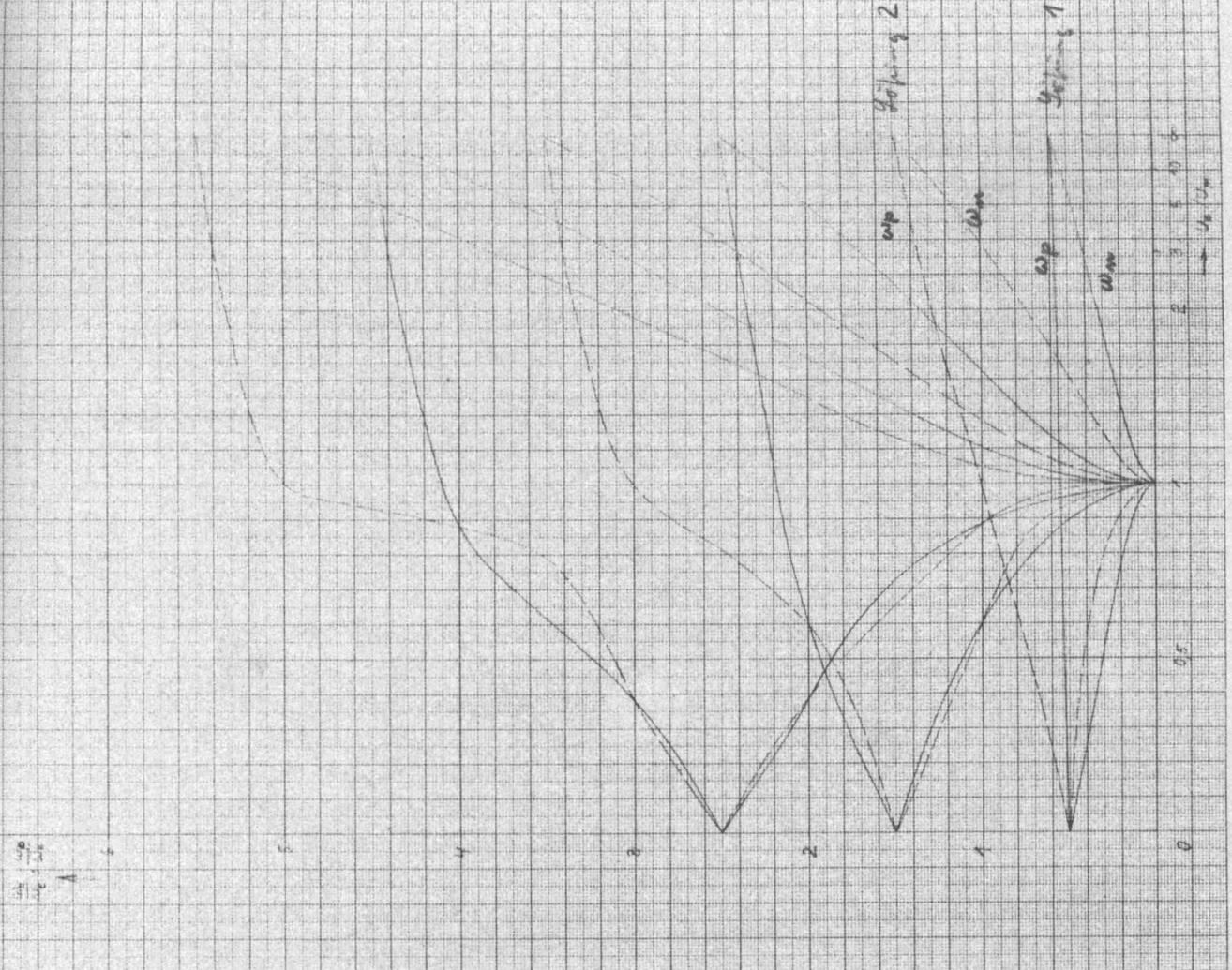
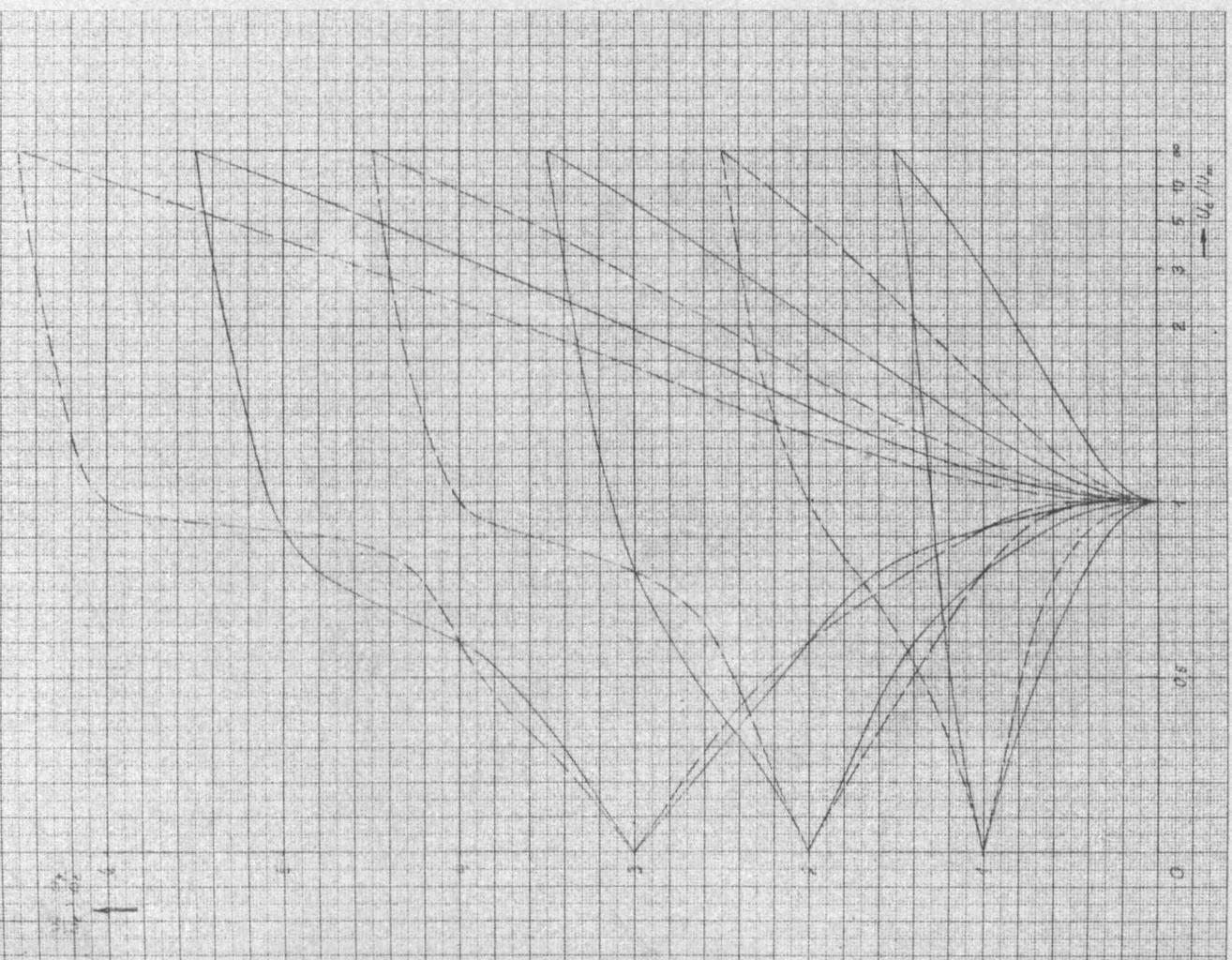
und als Ordinate

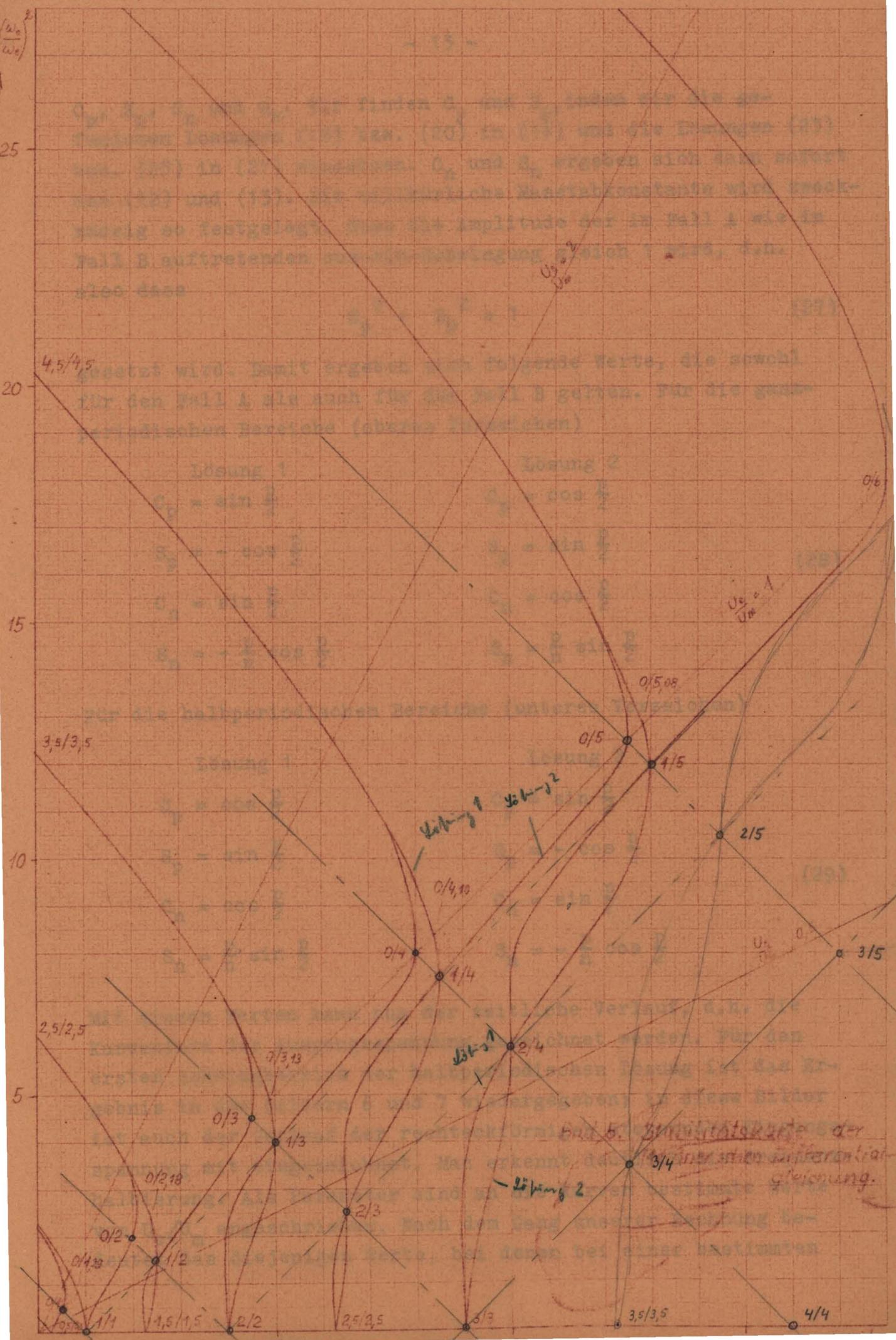
$$\gamma = \frac{U_e}{U_m} \cdot \left(\frac{\omega_o}{\omega_e}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\omega_p}{\omega_e}\right)^2 \mp \left(\frac{\omega_n}{\omega_e}\right)^2 \right] \quad (26b)$$

gewählt, wobei das obere Vorzeichen hier für den Fall A ($U_e \leq U_m$) und das untere für den Fall B ($U_e \geq U_m$) gilt. Man findet die Beziehungen (26a) und (26b) leicht aus den Gleichungen (9) und (10). Dann ergibt sich Bild 5. Dies ist die Stabilitätskarte der Meissner'schen Differentialgleichung in der Ince-Strutt'schen Darstellung für den hier vorliegenden Fall. Bei dieser Art der Darstellung können die Einzelfrequenzen ω_p und ω_n nicht mehr ohne weiteres abgelesen werden. Daher sind einige Wertepaare $\frac{\omega_p}{\omega_e}, \frac{\omega_n}{\omega_e}$ an die einzelnen Kurven angeschrieben, um den Verlauf dieser Grössen in grossen Zügen zu kennzeichnen. Der Parameter U_e/U_m wird durch Strahlen dargestellt, die vom Nullpunkt ausgehen; $U_e/U_m = 1$ ist die unter 45° geneigte Gerade. Bei der Betrachtung von Frequenzabhängigkeit ist zu beachten, dass der Abszissenmasstab reziprok zu ω_e^2 ist, dass also niedrige Erregerfrequenzen ganz rechts liegen und $\omega_e \rightarrow \infty$ mit der Ordinatenachse zusammenfällt.

Wir wollen nun den zeitlichen Verlauf der Ausgangsspannung genauer betrachten. Hierzu berechnen wir die Konstanten

Handwritten notes and a small diagram in the top-left corner of the left graph.





Lösung 1

Lösung 2

Lösung 1 Lösung 2

Lösung 1

Lösung 2

Bsp. 5. Zeichnen Sie die Phasenebene der Differentialgleichung.

4,5/4,5

3,5/3,5

2,5/2,5

1,5/1,5

0/2,18

0/2

0/4,28

1/1

1,5/1,5

2/2

0/3

7/3,13

1/3

2/3

2,5/2,5

0/4

0/4,10

1/4

2/4

3/3

0/5

0/5,08

1/5

3/4

3,5/3,5

2/5

3/5

4/4

0/6

$U_{\text{rel}} = 1$

$U_{\text{rel}} = 0$

C_p , S_p , C_n und S_n . Wir finden C_p und S_p , indem wir die gefundenen Lösungen (18) bzw. (20) in (14) und die Lösungen (23) bzw. (25) in (21) einsetzen. C_n und S_n ergeben sich dann sofort aus (12) und (13). Die willkürliche Masstabkonstante wird zweckmässig so festgelegt, dass die Amplitude der im Fall A wie im Fall B auftretenden cos-sin-Schwingung gleich 1 wird, d.h. also dass

$$C_p^2 + S_p^2 = 1 \quad (27)$$

gesetzt wird. Damit ergeben sich folgende Werte, die sowohl für den Fall A als auch für den Fall B gelten. Für die ganzperiodischen Bereiche (oberes Vorzeichen)

Lösung 1	Lösung 2
$C_p = \sin \frac{p}{2}$	$C_p = \cos \frac{p}{2}$
$S_p = -\cos \frac{p}{2}$	$S_p = \sin \frac{p}{2}$
$C_n = \sin \frac{p}{2}$	$C_n = \cos \frac{p}{2}$
$S_n = -\frac{p}{n} \cos \frac{p}{2}$	$S_n = \frac{p}{n} \sin \frac{p}{2}$

(28)

Für die halbperiodischen Bereiche (unteres Vorzeichen)

Lösung 1	Lösung 2
$C_p = \cos \frac{p}{2}$	$C_p = \sin \frac{p}{2}$
$S_p = \sin \frac{p}{2}$	$S_p = -\cos \frac{p}{2}$
$C_n = \cos \frac{p}{2}$	$C_n = \sin \frac{p}{2}$
$S_n = \frac{p}{n} \sin \frac{p}{2}$	$S_n = -\frac{p}{n} \cos \frac{p}{2}$

(29)

Mit diesen Werten kann nun der zeitliche Verlauf, d.h. die Kurvenform der Ausgangsspannung gezeichnet werden. Für den ersten Schwingbereich der halbperiodischen Lösung ist das Ergebnis in den Bildern 6 und 7 wiedergegeben; in diese Bilder ist auch der Verlauf der rechteckförmigen steuernden Eingangsspannung mit eingezeichnet. Man erkennt deutlich die Frequenzhalbierung. Als Parameter sind an die Kurven bestimmte Werte von U_e/U_m angeschrieben. Nach dem Gang unserer Rechnung bedeutet das diejenigen Werte, bei denen bei einer bestimmten

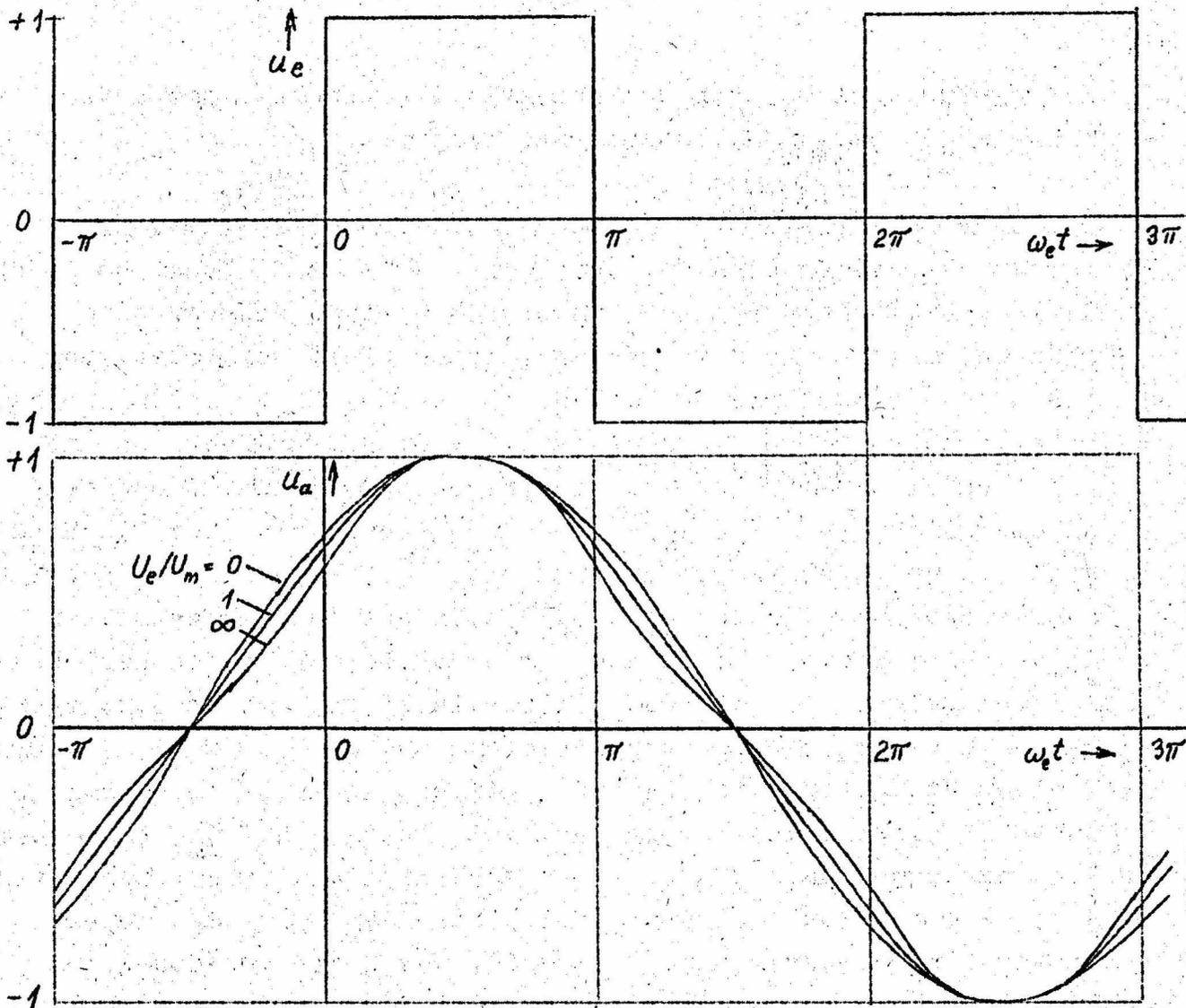


Bild 6. Zeitlicher Verlauf der Ausgangsspannung im ersten Schwingbereich nach Lösung 1.

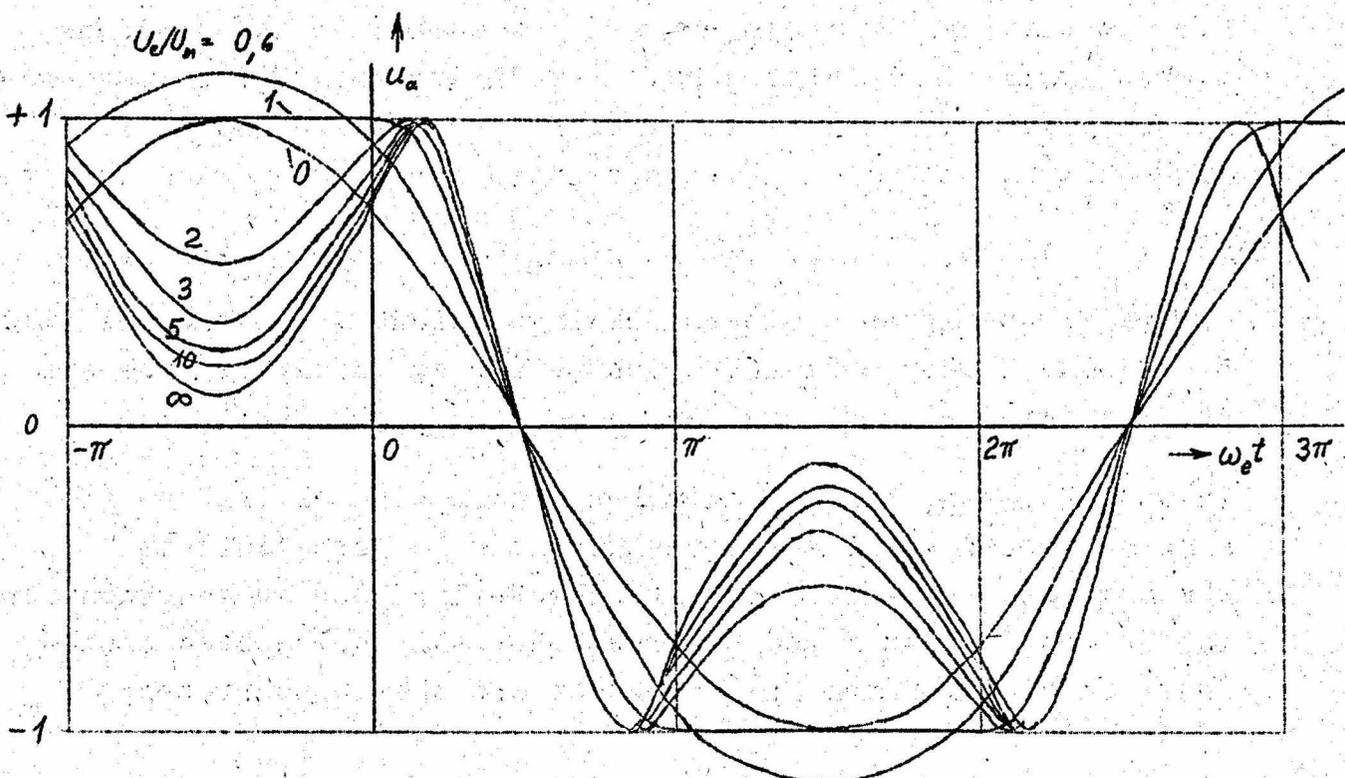


Bild 7. Zeitlicher Verlauf der Ausgangsspannung im

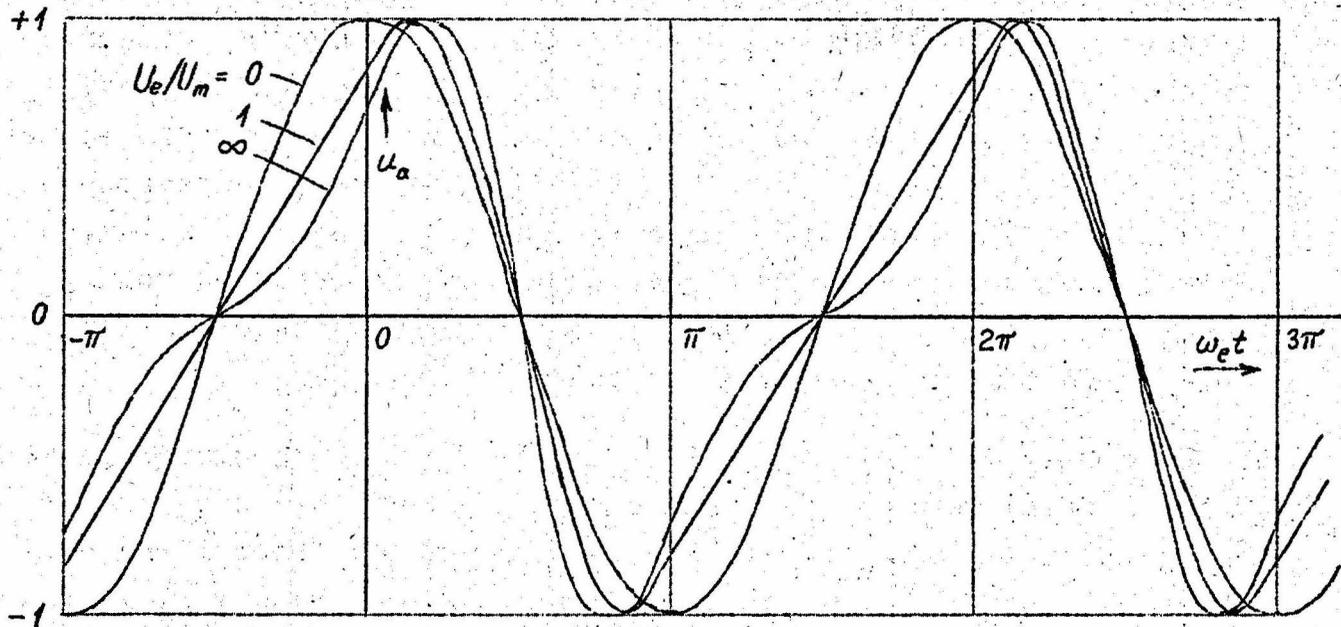
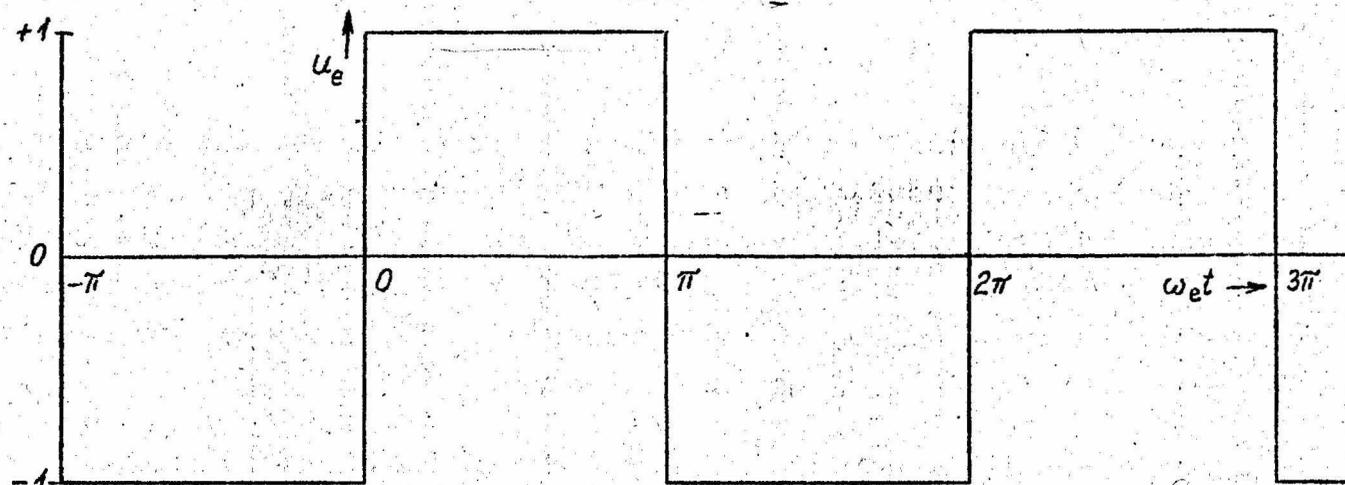


Bild 8. Zeitlicher Verlauf der Ausgangsspannung im zweiten Schwingbereich (d.h. im ersten ganzperiodischen) nach Lösung 1.

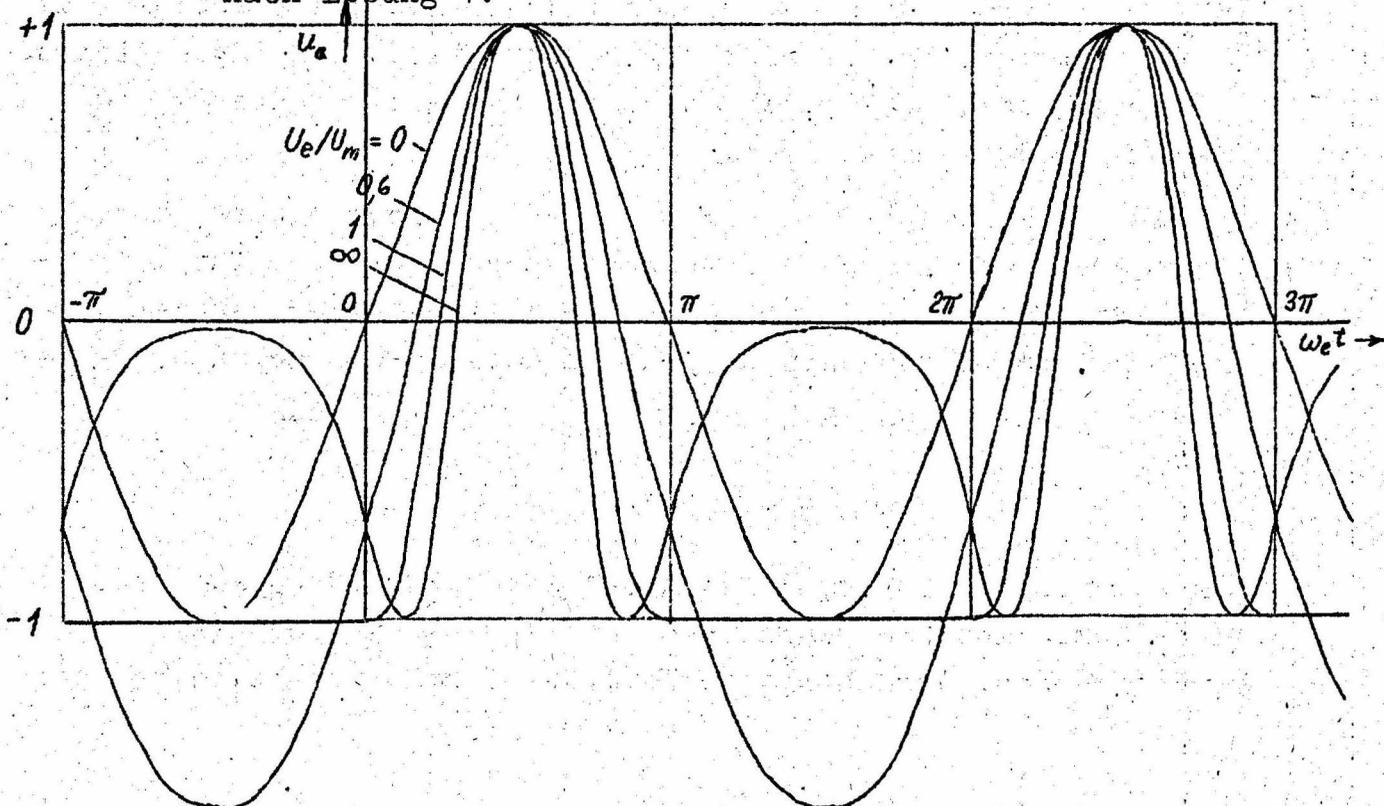


Bild 9. Wie Bild 8, aber nach Lösung 2.

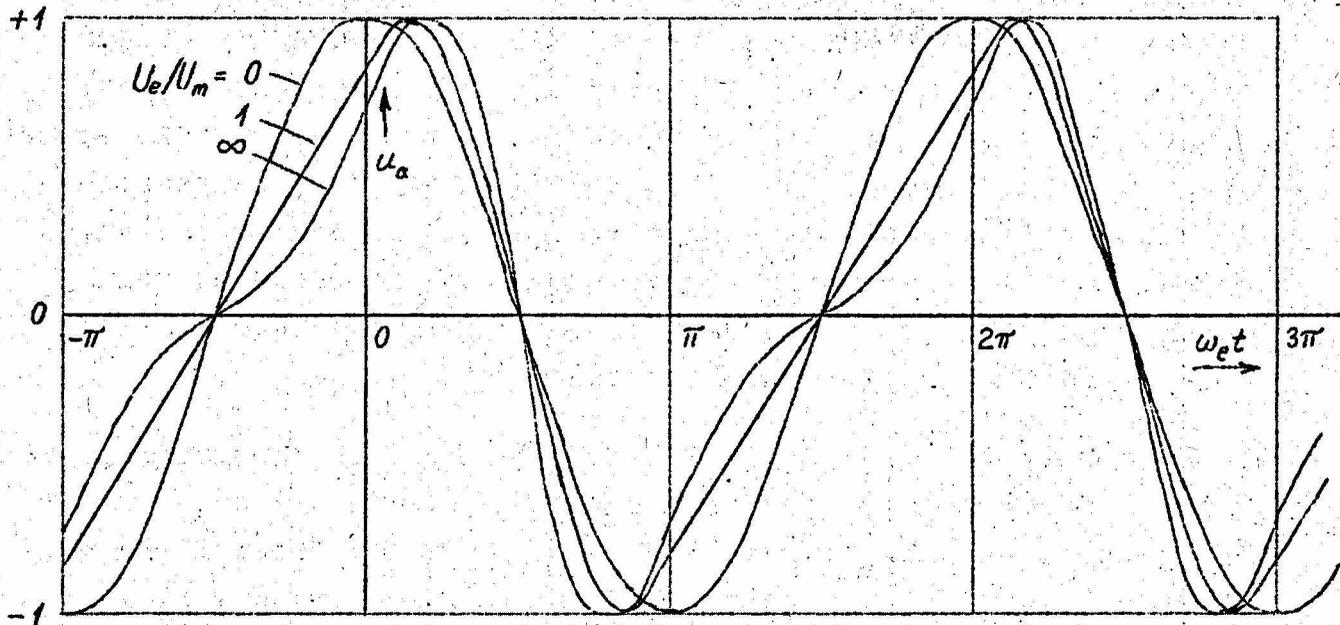
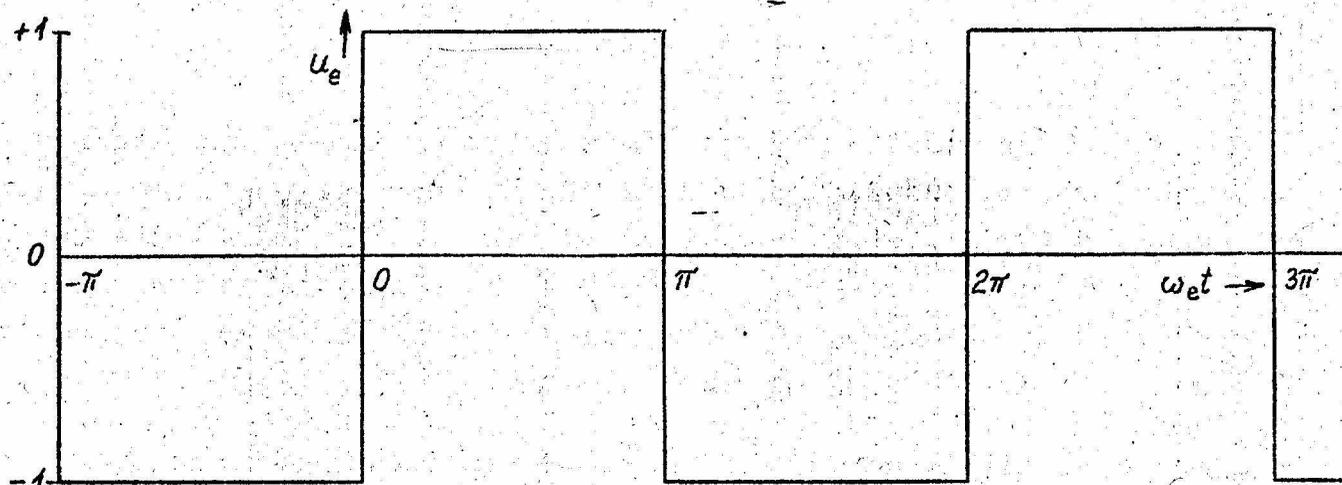


Bild 8. Zeitlicher Verlauf der Ausgangsspannung im zweiten Schwingbereich (d.h. im ersten ganzperiodischen) nach Lösung 1.

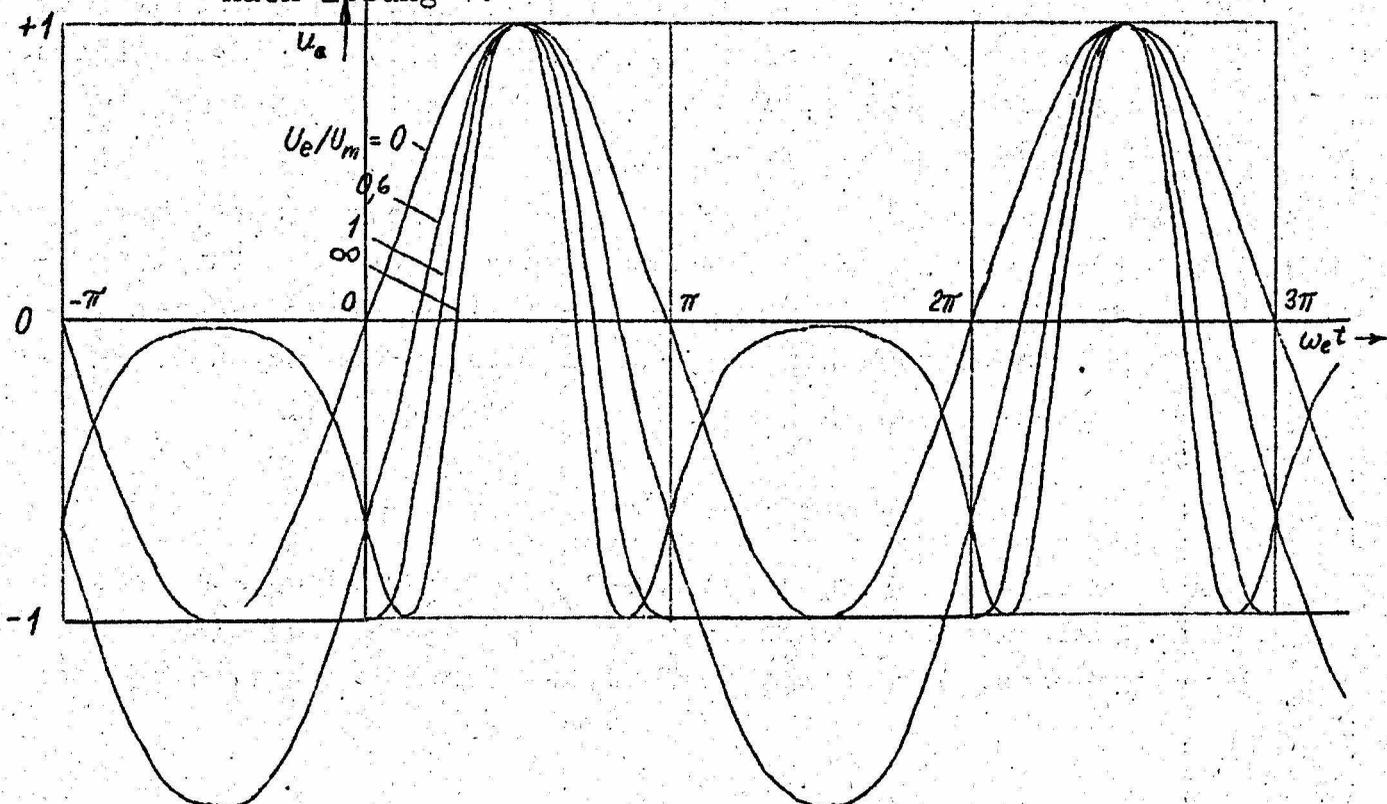


Bild 9. Wie Bild 8, aber nach Lösung 2.

längs der ganzen Grenzkurve des Schwingbereiches, die der Lösung 1 entspricht, finden wir eine einigermaßen sinusförmige Schwingung, während längs der anderen Grenzkurve (Lösung 2) die Kurvenform bei grösserem U_e/U_m stark verzerrt wird. Ausserdem tritt hier noch ein ausgeprägter "Gleichrichtereffekt" auf, der den Schwingungsmittelpunkt nach unten verlagert.

In den Schwingbereichen höherer Ordnung finden wir nun zusätzlich zu dem eben Besprochenen Ueberschneidungen der Grenzkurven und zwar in umso grösserer Zahl, je höher die Ordnungszahl der Bereiche wird (vgl. Bild 5). Die Schnittpunkte der Kurven sind mathematisch und praktisch von besonderem Interesse. Während nach Sätzen von O. Haupt [10] sonst die Grenzkurven als zu den labilen Bereichen zugehörig gerechnet werden müssen, sind, da hier die beiden linear unabhängigen Lösungen rein periodisch sind, die Lösungen in den Schnittpunkten stabil. Dies wird weiter unten noch anschaulich klar werden.

Einige Beispiele für den zeitlichen Verlauf der Ausgangsspannung in den Bereichen mit der Ordnungszahl $5/2$ und $6/2$ sind in den Bildern 10 - 13 wiedergegeben; sie lassen das Wesentliche des Verhaltens in allen Schwingbereichen höherer Ordnung klar erkennen. Immer wird in der negativen Halbwelle der Eingangsspannung die Frequenz der Ausgangsspannung niedriger, und die Schwingung muss sich in der positiven Halbwelle "beeilen", um die erforderliche "mittlere" Frequenz dieses Schwingbereiches, gekennzeichnet z.B. durch die Zahl der Nulldurchgänge, im ganzen wiederherzustellen.

In den ganz periodischen Schwingbereichen ist im Bereich der Lösung 1 immer die Spannung $u_p = 0$ für $\omega_e t = \frac{\pi}{2}$ und ebenfalls $u_n = 0$ für $\omega_e t = -\frac{\pi}{2}$; im übrigen ist der Verlauf der Schwingung symmetrisch zu diesen Punkten, d.h. es ist

$$u_p\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -u_p\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \quad \text{und}$$

$$u_n\left(-\frac{\pi}{2} + t\right) = -u_n\left(-\frac{\pi}{2} - t\right).$$

Im Bereich der Lösung 2 ist $u_p\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, während $u_n\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ verschiedene Werte annehmen kann, die sich aus den Gleichungen (28) und (29) ergeben; der übrige Verlauf der Schwingung ist also hier

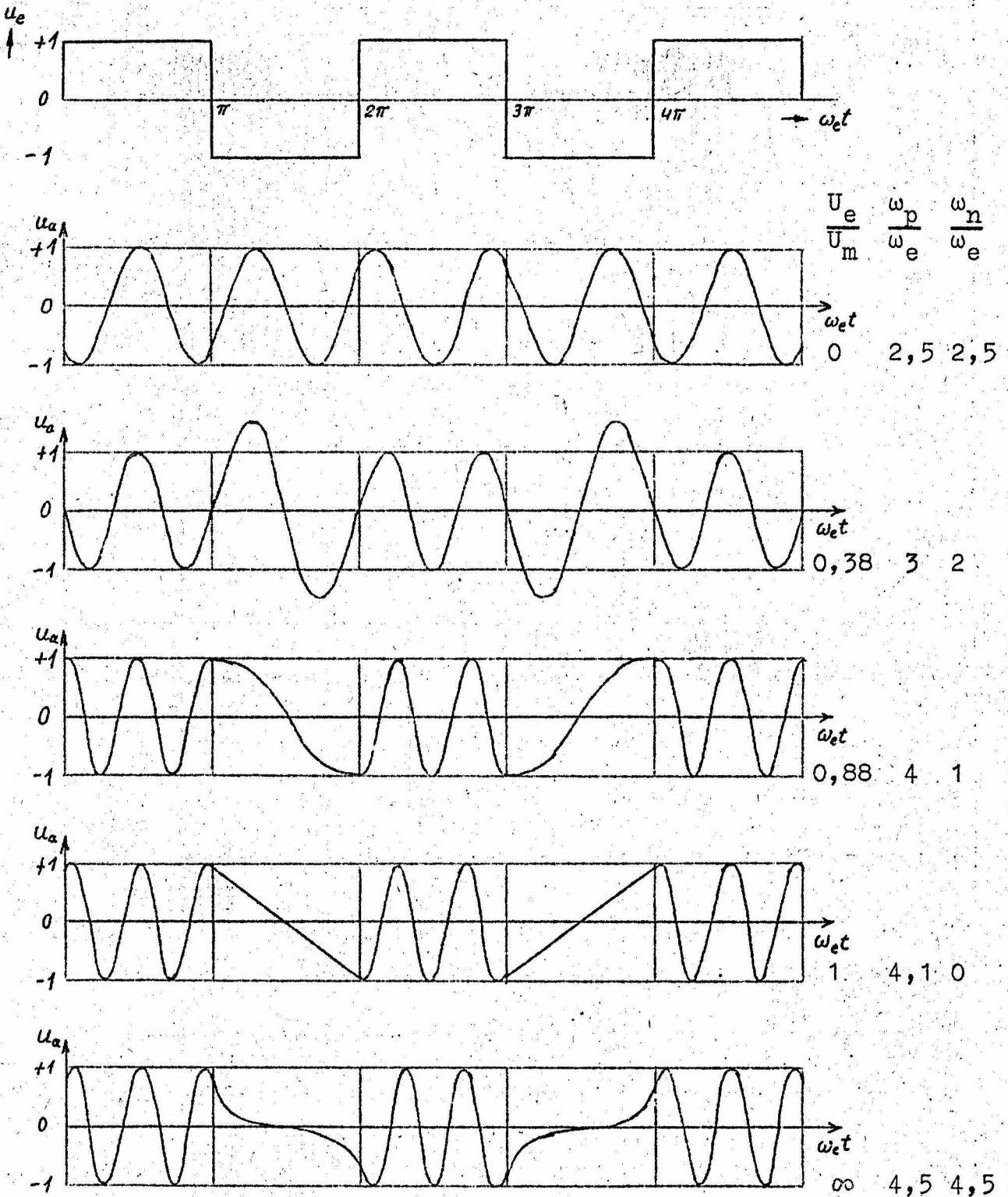
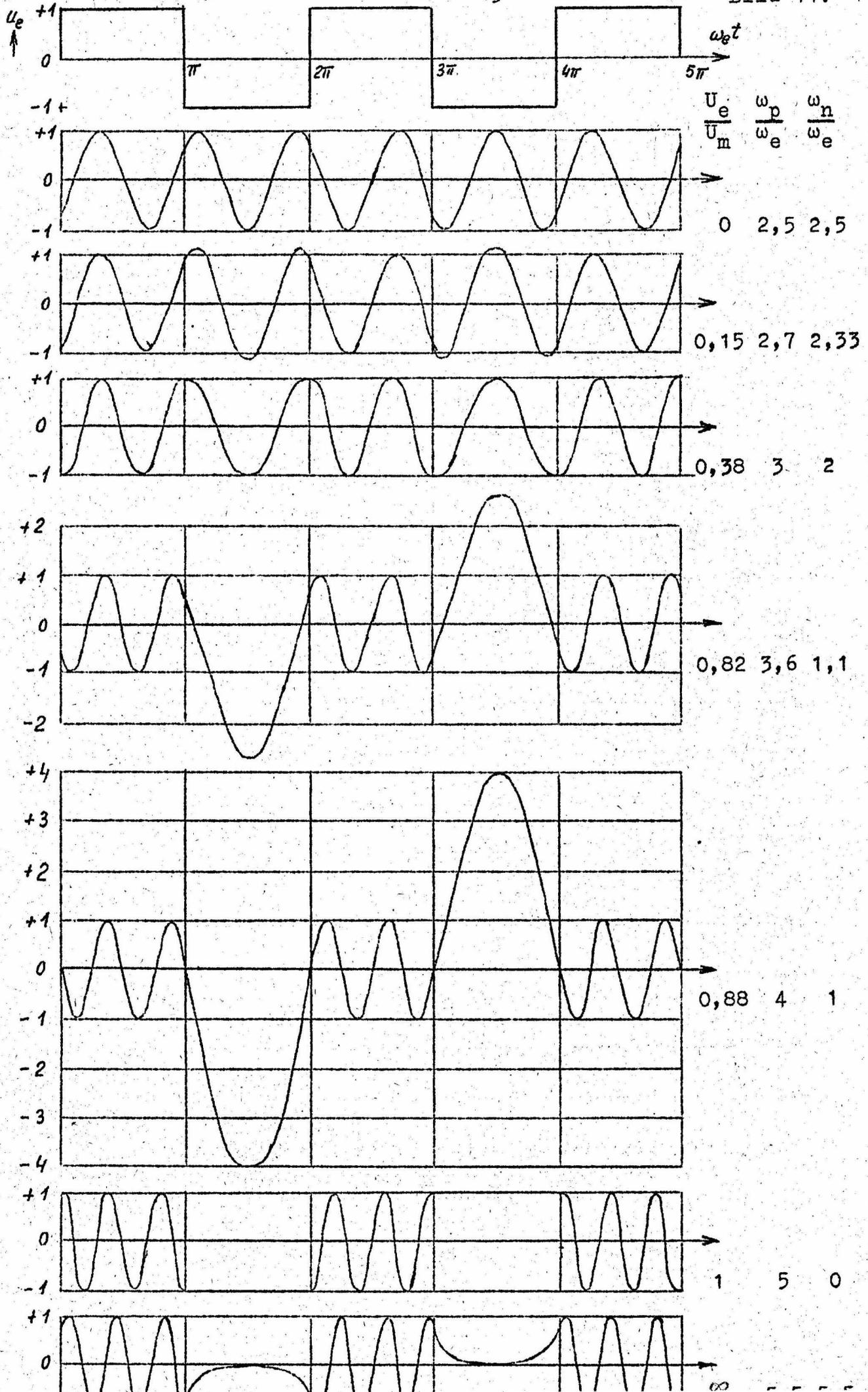


Bild 10. Zeitlicher Verlauf der Ausgangsspannung im fünften, d.h. im dritten halberiodischen Schwingebereich nach Lösung 1.



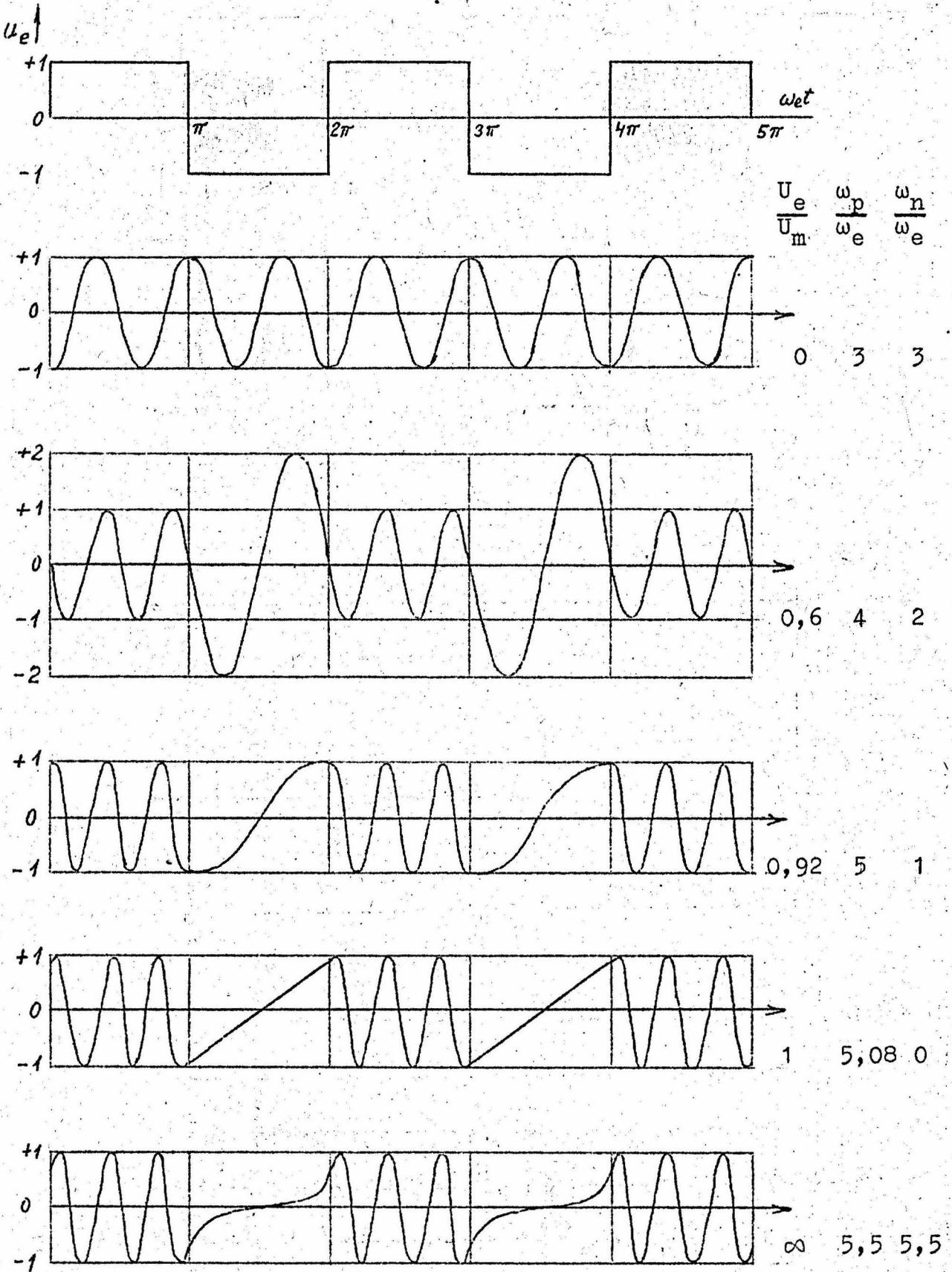


Bild 12. Zeitlicher Verlauf der Ausgangsspannung im sechsten, d.h. im dritten ganzperiodischen Schwingbereich nach Lösung 1.

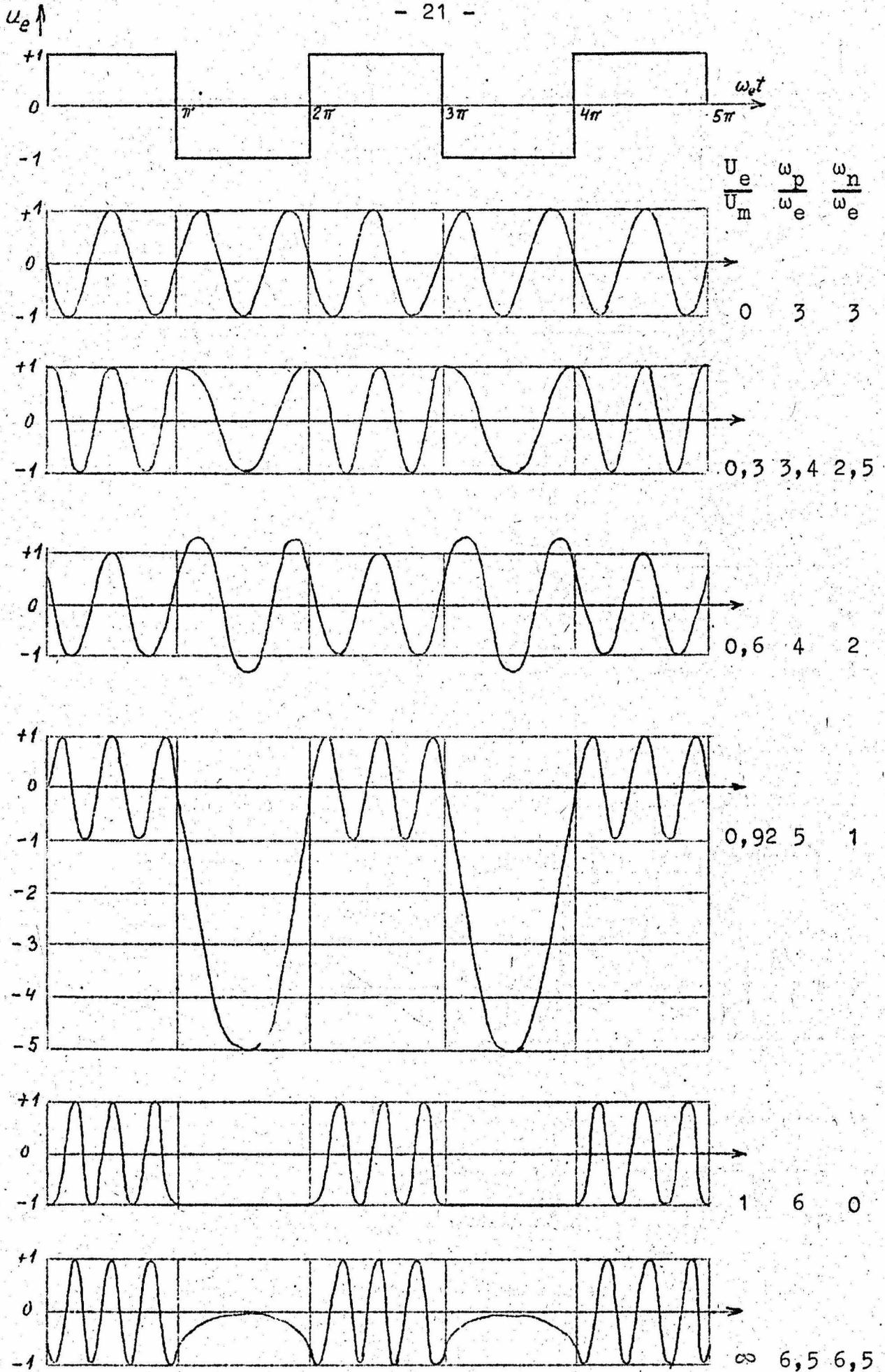


Bild 13. Wie Bild 12, aber nach Lösung 2.

symmetrisch zu den senkrechten Achsen $\omega_e t = \frac{\pi}{2}$ bzw. $\omega_e t = -\frac{\pi}{2}$, d.h. es ist

$$u_p \left(\frac{\pi}{2} + t \right) = u_p \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \quad \text{und}$$

$$u_n \left(-\frac{\pi}{2} + t \right) = u_n \left(-\frac{\pi}{2} - t \right) .$$

In den halbp er i o d i s c h e n Bereichen ist im Bereich der Lösung 1 $u_p \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1$ und $u_n \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 0$ und der Schwingungsverlauf für u_p symmetrisch zur Senkrechten $\omega_e t = +\frac{\pi}{2}$ und für u_n symmetrisch zum Punkt $\left(-\frac{\pi}{2}, 0 \right)$.

Im Bereich der Lösung 2 ist $u_p \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1$, während $u_n \left(-\frac{\pi}{2} \right)$ wieder verschiedene Werte annehmen kann; der Schwingungsverlauf ist für u_p symmetrisch zum Punkt $\left(+\frac{\pi}{2}, 0 \right)$ und für u_n symmetrisch zur Senkrechten $\omega_e t = -\frac{\pi}{2}$.

Von praktischer Bedeutung ist vielleicht, dass an den Punkten $U_e/U_m = 0$ stets beide Frequenzen gleich sind, man also eine rein sinusförmige Ausgangsspannung erhält, dass die Ausgangsfrequenz hier aber ein ganz- oder halbzahliges V i e l f a c h e s der Eingangsfrequenz ist. Das Rückmischverfahren kann also nicht nur zur Frequenzteilung, sondern in diesen Arbeitspunkten auch zur Frequenzvervielfachung verwendet werden.

b). Berücksichtigung der Dämpfung

Dass bei $U_e/U_m = 0$, also bei verschwindender Erregung nach obiger Rechnung überhaupt Schwingungen auftreten können, liegt natürlich daran, dass wir die Verluste vernachlässigt haben. In Wirklichkeit muss bei gegebenen Verlusten immer eine bestimmte Mindesterrregung U_e/U_m aufgebracht werden, um den Rückmischteiler zum Schwingen zu bringen. Wir wollen daher jetzt die eingangs gemachte Einschränkung über die Verlustfreiheit des Filters und den Eingangs- und Ausgangswiderstand der Mischstufe fallen lassen. Wir denken uns die Verluste der Spule durch einen Reihenwiderstand, die des Kondensators durch einen Parallelwiderstand ersetzt. Ausserdem wollen wir den Ausgangswiderstand der Mischstufe gleich in den Reihenwiderstand und den Eingangswiderstand dieser Stufe in den Parallelwiderstand miteinbezogen denken (Bild 14). Damit ergibt sich als Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u_a}{dt^2} + \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L} \right) \frac{du_a}{dt} + \frac{1}{LC} \left(1 + GR \pm \frac{U_e}{U_m} \right) u_a = 0 \quad (30)$$

oder in bekannter Weise abgekürzt

$$\frac{d^2 u_a}{dt^2} + 2\delta \frac{du_a}{dt} + \nu_p^2 \cdot u_a \quad \text{bzw.} \quad \nu_n^2 \cdot u_a = 0. \quad (30a)$$

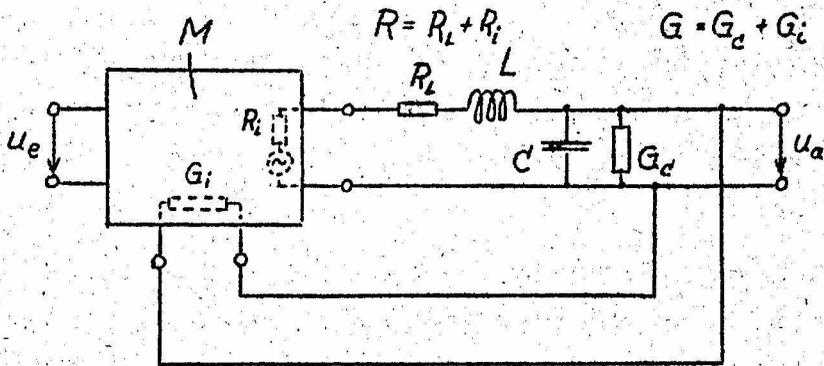


Bild 14. Rückmischteiler mit Berücksichtigung der Dämpfungswiderstände.

Die Lösung kann ähnlich wie oben angeschrieben werden und lautet z.B. in komplexer Schreibweise

$$u_p = \text{Re} \left(L_p \cdot \text{Lo} f_p t + \sigma_p \cdot \text{Im} f_p t \right) = e^{-\delta t} (C'_p \cos \nu_p t + S'_p \sin \nu_p t) \quad (31a)$$

$$u_n = \text{Re} \left(L_n \cdot \text{Lo} f_n t + \sigma_n \cdot \text{Im} f_n t \right) = e^{-\delta t} (C'_n \cos \nu_n t + S'_n \sin \nu_n t) \quad (31b)$$

Sie führt auf die allgemeine Bedingung

$$1 \mp \left[\frac{1}{2} \left(\frac{p}{m} + \frac{m}{p} \right) \cdot \text{Im } p \cdot \text{Im } m + \text{Lo} f_p \cdot \text{Lo} f_m \right] = 0. \quad (32)$$

Hierin sind

$$p = d + ju \quad (33a)$$

$$m = d + jv \quad (33b)$$

komplexe Größen, wobei

$$u = \frac{v_p}{\omega_e} \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{v_p^2}} \pi \quad (34a)$$

$$v = \frac{v_n}{\omega_e} \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{v_n^2}} \pi \quad (34b)$$

$$d = \frac{\delta}{\omega_e} \pi \quad (34c)$$

bedeutet.

Die Ausrechnung ergibt als Beziehung für die Grenzkurven der Schwingbereiche

$$\cos 2d \pm \left[\frac{1}{2} \left(\frac{p'}{n'} + \frac{n'}{p'} \right) \sin p' \cdot \sin n' - \cos p' \cdot \cos n' \right] = 0 \quad (35)$$

mit

$$p' = \frac{v_p}{\omega_e} \pi \quad \text{und} \quad n' = \frac{v_n}{\omega_e} \pi \quad (36)$$

Bei nicht allzu grosser Dämpfung ist $v_p \approx \omega_p$ und $v_n \approx \omega_n$. Der wesentliche Unterschied der allgemeineren Beziehung zu der Beziehung (16), die für den verlustlosen Fall galt, besteht also darin, dass in (35) $\cos 2d$ statt 1 steht, oder, da $\cos 2d = 1 - \sin^2 d$ ist, darin, dass zusätzlich der Summand $\sin^2 d$ auftritt. Während nun die Dämpfung den zeitlichen Verlauf, also die Kurvenform nur geringfügig ändert, wie man sich anschaulich leicht klar macht, hat sie auf die Grösse der Schwingbereiche einen wesentlichen Einfluss. In Bild 15 sind Grenzkurven für verschiedene Parameterwerte der Dämpfung eingetragen. Man erkennt, wie infolge der Dämpfung die Schwingbereiche verkleinert werden. Bemerkenswert ist, dass die Gebiete, die beim dämpfungslosen Fall durch die Ueberkreuzungspunkte der beiden Lösungen voneinander getrennt wurden, jetzt zu einzelnen "Schwinginseln" zusammenschrumpfen, die bei genügend grosser Dämpfung sogar vollständig verschwinden können. Hierdurch findet die oben erwähnte Tatsache, dass die Ueberkreuzungspunkte als stabile Punkte anzusehen sind, eine besonders anschauliche Deutung.

Für viele Fälle ist es wichtig zu wissen, bei welchen Dämpfungswerten überhaupt noch eine Schwingung in einem bestimmten Schwingbereich erregt werden kann. Diese "Gipfelpunkte" des

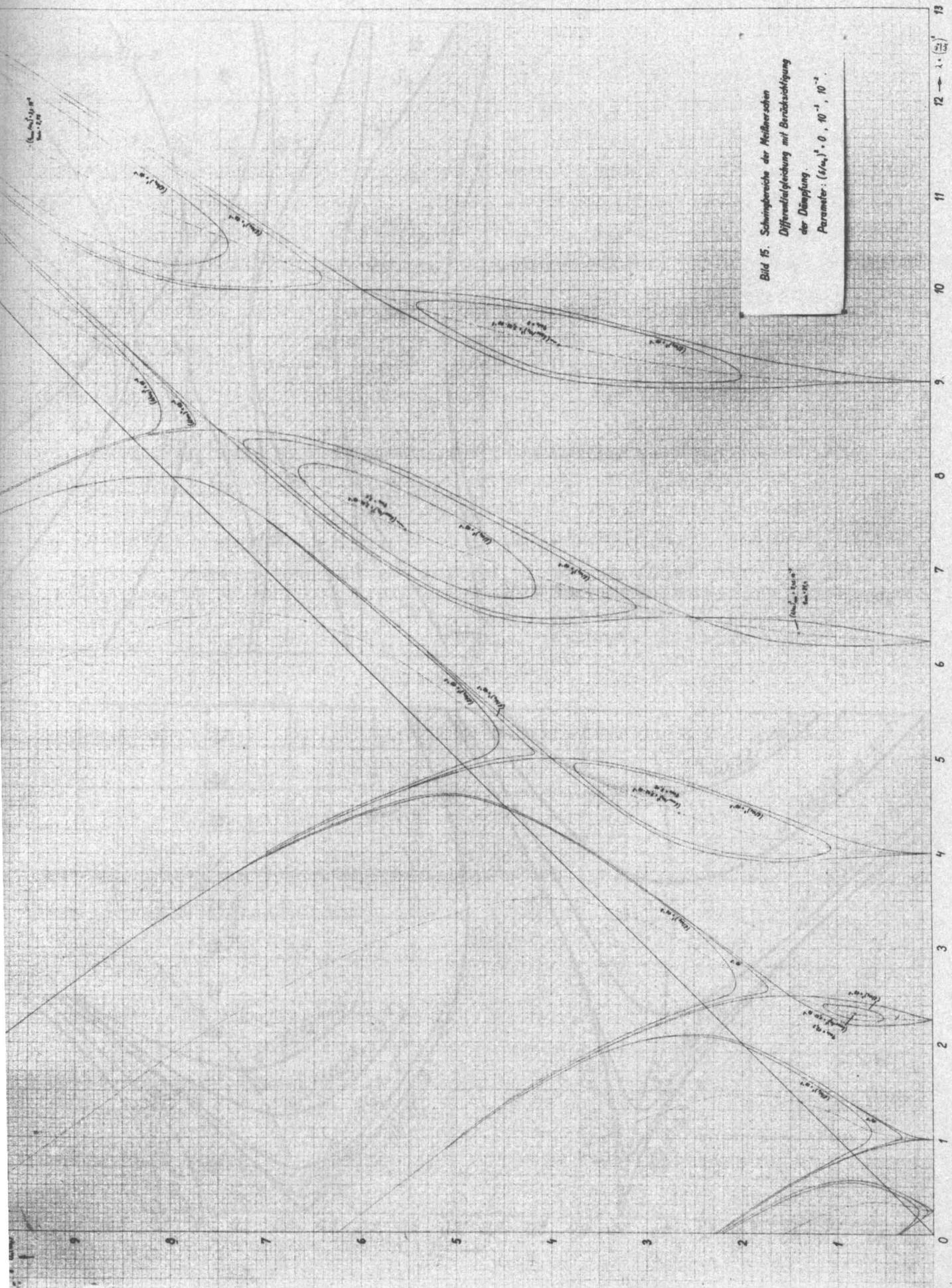
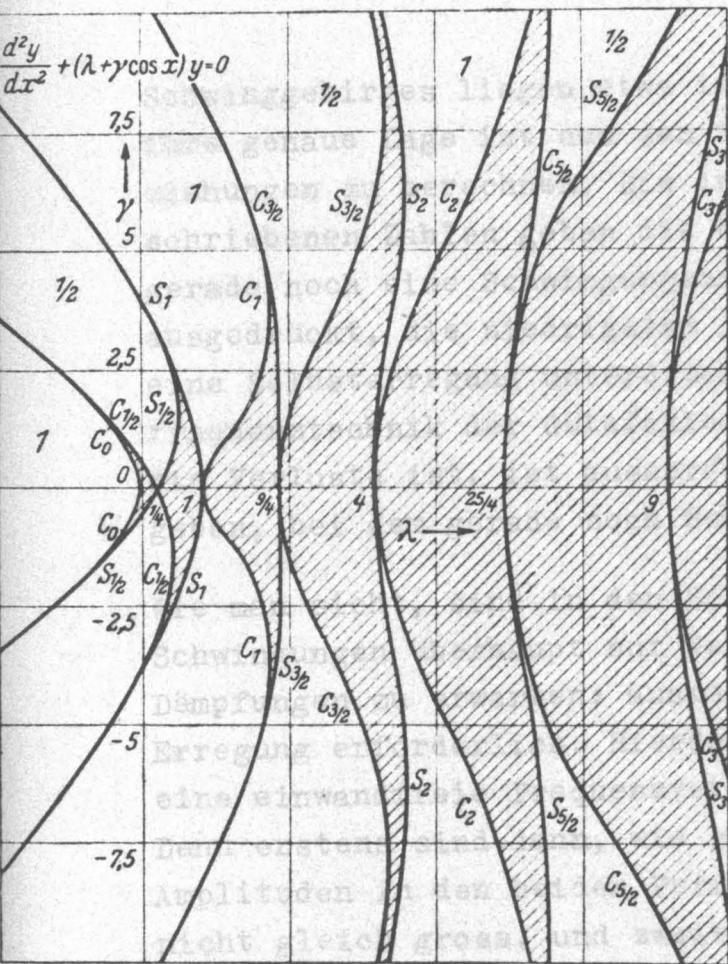


Bild 15. Schwingbereiche der Meßversuche
Differentialgleichung mit Berücksichtigung
der Dämpfung.
Parameter: $(1/\omega_0)^2 = 0, 10^{-1}, 10^{-2}$.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 \rightarrow $\frac{1}{\omega_0^2}$ 13



der Mitte der Schwinginseln;
 in Abhängung abgeleiteten Be-
 Bild 15 an diese Punkte ange-
 gebenen Dämpfungen an, mit denen
 Erregung möglich ist, oder anders
 Dämpfungen, mit denen eben noch
 werden kann. Da in der Hoch-
 ein gebräuchlicheres Mass für
 in Klammern der Wert q_{min} ange-
 gebungen auftreten können.

Schwingbereichen höherer Ordnung
 verhältnismässig geringen
 ist dazu eine merklich grosse
 werden die Möglichkeiten für
 Bild 16 a. k. eingeschränkt.

Grenzkurven der Schwingbereiche
 der Mathieschen Differential-
 gleichung ("Ince-Struttische
 Karte"). Stabile Bereiche
 schraffiert.

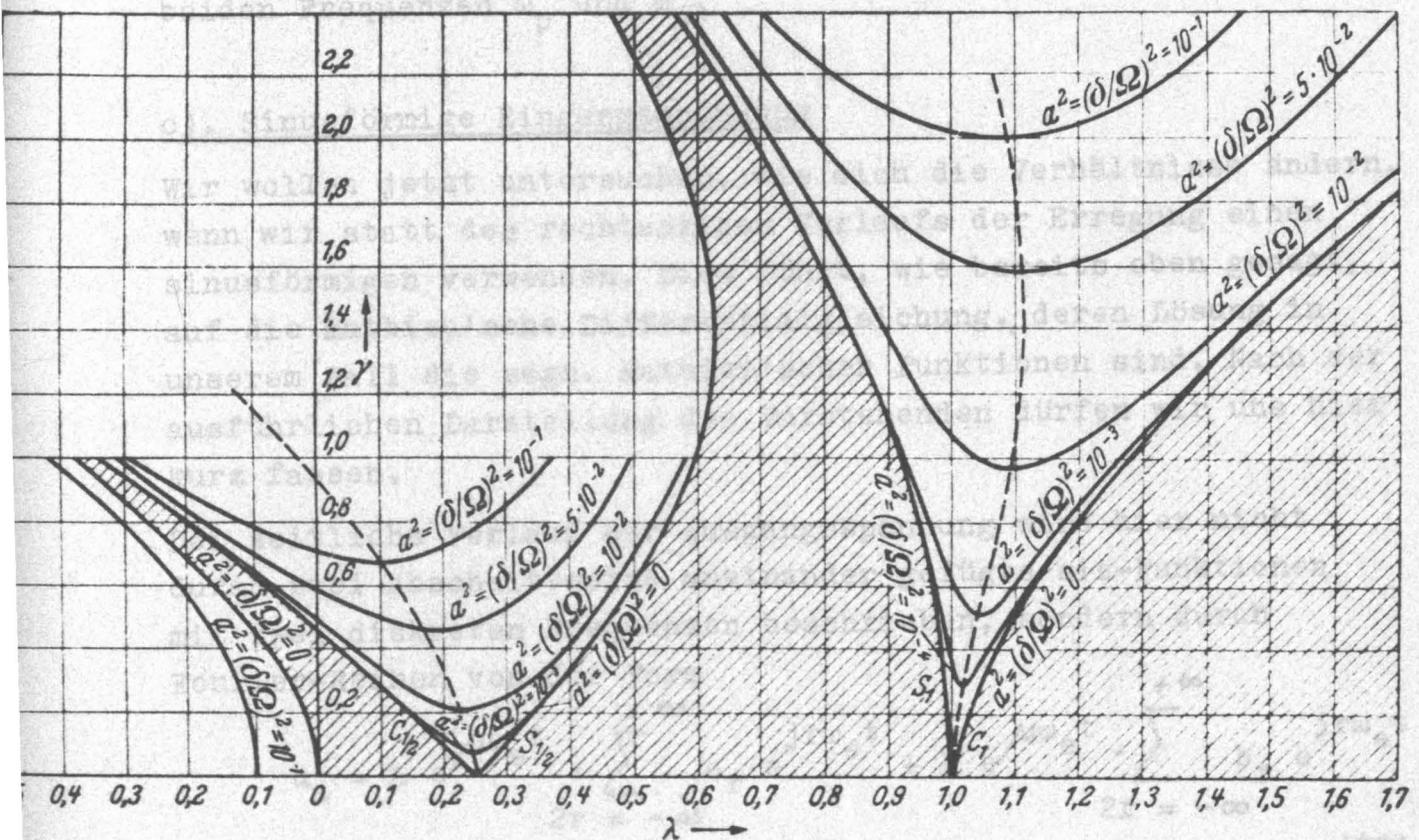


Bild 16 b. Grenzkurven der Schwingbereiche der Mathieschen Differentialgleichung bei Berücksichtigung der Dämpfung.

Schwinggebirges liegen etwa in der Mitte der Schwinginseln; ihre genaue Lage ist aus den im Anhang abgeleiteten Beziehungen zu berechnen. Die in Bild 15 an diese Punkte angeschriebenen Zahlen geben die höchsten Dämpfungen an, mit denen gerade noch eine Schwingungsanfachung möglich ist, oder anders ausgedrückt, die niedrigsten Dämpfungen, mit denen eben noch eine Selbsterregung unterdrückt werden kann. Da in der Hochfrequenztechnik der Gütefaktor q ein gebräuchlicheres Mass für die Verluste ist, ist ausserdem in Klammern der Wert q_{\min} angegeben, bei dem gerade noch Schwingungen auftreten können.

Wie man sieht, sind in den Schwingbereichen höherer Ordnung Schwingungen überhaupt nur bei verhältnismässig geringen Dämpfungen zu erwarten; ausserdem ist dazu eine merklich grosse Erregung erforderlich. Hierdurch werden die Möglichkeiten für eine einwandfreie Frequenzvervielfachung stark eingeschränkt. Denn erstens sind dann, wie schon auf Seite 17 erwähnt, die Amplituden in den beiden Periodenhälften der Eingangsspannung nicht gleich gross, und zweitens bedingt nach Gleichung (9) eine endliche Erregung U_e/U_m stets eine Verschiedenheit der beiden Frequenzen ω_p und ω_n .

c). Sinusförmige Eingangsspannung

Wir wollen jetzt untersuchen, wie sich die Verhältnisse ändern, wenn wir statt des rechteckigen Verlaufs der Erregung einen sinusförmigen verwenden. Dies führt, wie bereits oben gesagt, auf die Mathieu'sche Differentialgleichung, deren Lösung in unserem Fall die sog. Mathieu'schen Funktionen sind. Nach der ausführlichen Darstellung des Vorstehenden dürfen wir uns hier kurz fassen.

Der zeitliche Verlauf der Ausgangsspannung wird hier nicht durch zwei abschnittsweise aneinander gefügte \sin -Funktionen mit zwei diskreten Frequenzen beschrieben, sondern durch Fourier-Reihen von der Form

$$u_a = A e^{j\omega_e t} \cdot \sum_{2r = -\infty}^{+\infty} a_r \cdot e^{jr\omega_e t} + B e^{j\omega_e t} \cdot \sum_{2r = -\infty}^{+\infty} b_r e^{jr\omega_e t} \quad (37)$$

drücker $u_a = \sum_{m=0}^{\infty} A_{n,m} \cos \frac{1}{2} m\omega_e t$ bzw. $\sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m} \sin \frac{1}{2} m\omega_e t$

dargestellt. Die Konstanten a_r und b_r sind bekannt und tabuliert [8]. Die Addition sämtlicher Teilschwingungen ergibt eine resultierende Schwingung - eben eine Mathieu'sche Funktion -, die grosse Aehnlichkeit mit den früher beschriebenen Spannungskurven hat. Zum Unterschied jedoch ändert sich hier, wenn die Erregung von der positiven in die negative Halbwelle wechselt oder umgekehrt, die Frequenz der Ausgangsspannung nicht plötzlich zwischen zwei Werten, sondern geht allmählich von einem höheren in einen niedrigeren Wert über und umgekehrt. Die Bezeichnung "Frequenz" ist dabei allerdings in einem erweiterten Sinne zu verstehen, da sich die Frequenz hier - ähnlich wie bei der Frequenzmodulation - auch schon innerhalb einer Periode stetig ändert. In den Schwingbereichen höherer Ordnung drängen sich die Nulldurchgänge mit wachsender Ordnungszahl immer mehr bei den Werten $\omega_e t = \pi$ zusammen, wobei aber, wie oben, die "mittlere" Frequenz erhalten bleibt. Nur bei $U_e/U_m = 0$ erhalten wir auch hier wieder eine rein sinusförmige Ausgangsspannung mit entsprechend geteilter oder vervielfachter Frequenz. Die zeichnerische Darstellung der Kurvenform nach Gleichung (37) für einen allgemeinen Fall ist sehr mühsam, da insbesondere in Schwingbereichen höherer Ordnung viele Glieder berücksichtigt werden müssen. Dagegen kann der Klirrfaktor zahlenmässig leicht angegeben werden, da die einzelnen Koeffizienten bekannt sind.

Die Schwingbereiche selbst sehen denen der Meissner'schen Differentialgleichung sehr ähnlich (vgl. Bild 16), nur fehlen die bei dieser auftretenden Ueberschneidungen in den Bereichen höherer Ordnung. Wie man jedoch durch Vergleich leicht feststellen kann, decken sich die Schwingbereiche im Mittel erst dann besonders gut mit denen der Meissner'schen Differentialgleichung, wenn die Ordinatenmasstäbe in der Weise umgerechnet werden, dass im Falle der Meissner'schen Differentialgleichung nicht die Amplitude der Rechteckspannung, sondern die Amplitude der Sinusgrundschwingung dieses Rechteckes, also das $4/\pi$ -fache jener Amplitude, mit der Amplitude der sinusförmigen Erregung im Falle der Mathieu'schen Differentialgleichung gleich gesetzt wird, eine Bemerkung, die leicht einleuchtet und auf die schon Strutt [7] hingewiesen hat.

finden. Wie sich jedoch zeigte, genügten bereits gewöhnliche Ringmodulatoren für fast alle Fälle.

Der Versuchsaufbau, mit dem die nachstehend beschriebenen Messungen durchgeführt wurden, ist in Bild 17 gezeigt.

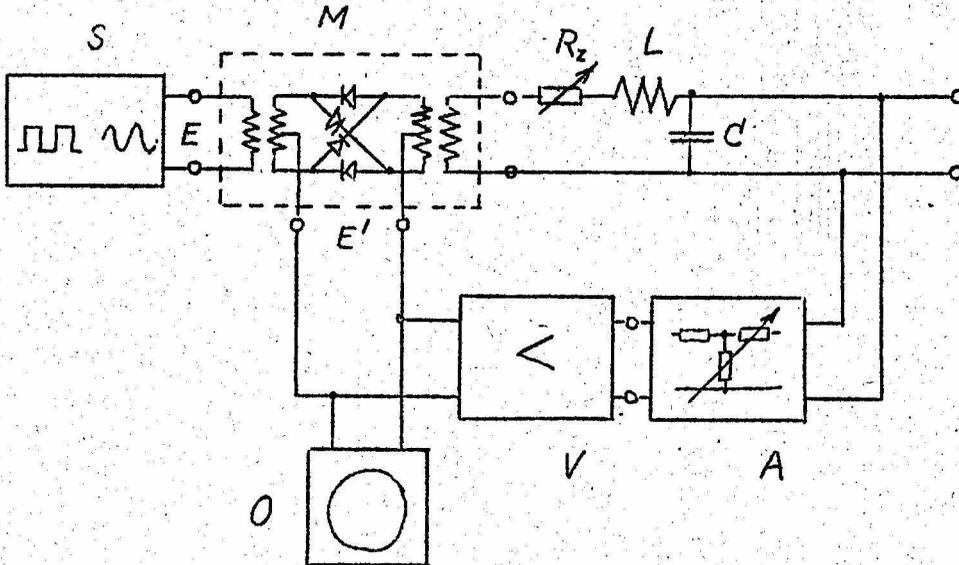


Bild 17. Experimenteller Aufbau zur Untersuchung der Meissner'schen und Mathieu'schen Differentialgleichung

S ist ein Sender, der entweder sinus- oder rechteckförmige Spannungen an den Eingang E des Ringmodulators M liefert. Das Filter bestand aus einer Induktivität L, für die meist eine Ringkernspule hoher Güte verwendet wurde, und praktisch verlustfreien Kapazitäten C; es war in den meisten Fällen auf 1 kHz abgestimmt. Durch zusätzliche Widerstände R_z konnte die Dämpfung verändert werden. Die Ausgangsspannung des Filters, die gleichzeitig die Ausgangsspannung des Rückmischers ist, gelangte über einen geeichten Abschwächer A und einen Verstärker V an den zweiten Eingang E' des Ringmodulators und konnte dort mit einem Kathodenstrahloszillographen O beobachtet werden. A und V waren ohnehin im Oszillographen vorhanden; daher brauchten hier für keine besonderen Geräte verwendet zu werden.

Die Schwingbereiche der Meissner'schen Differentialgleichung wurden so gemessen, dass dem Ringmodulator eine Rechteckeingangsspannung von etwa 5 V Amplitude zugeführt wurde; bei dieser Spannung wirkt der Ringmodulator ohnehin schon praktisch

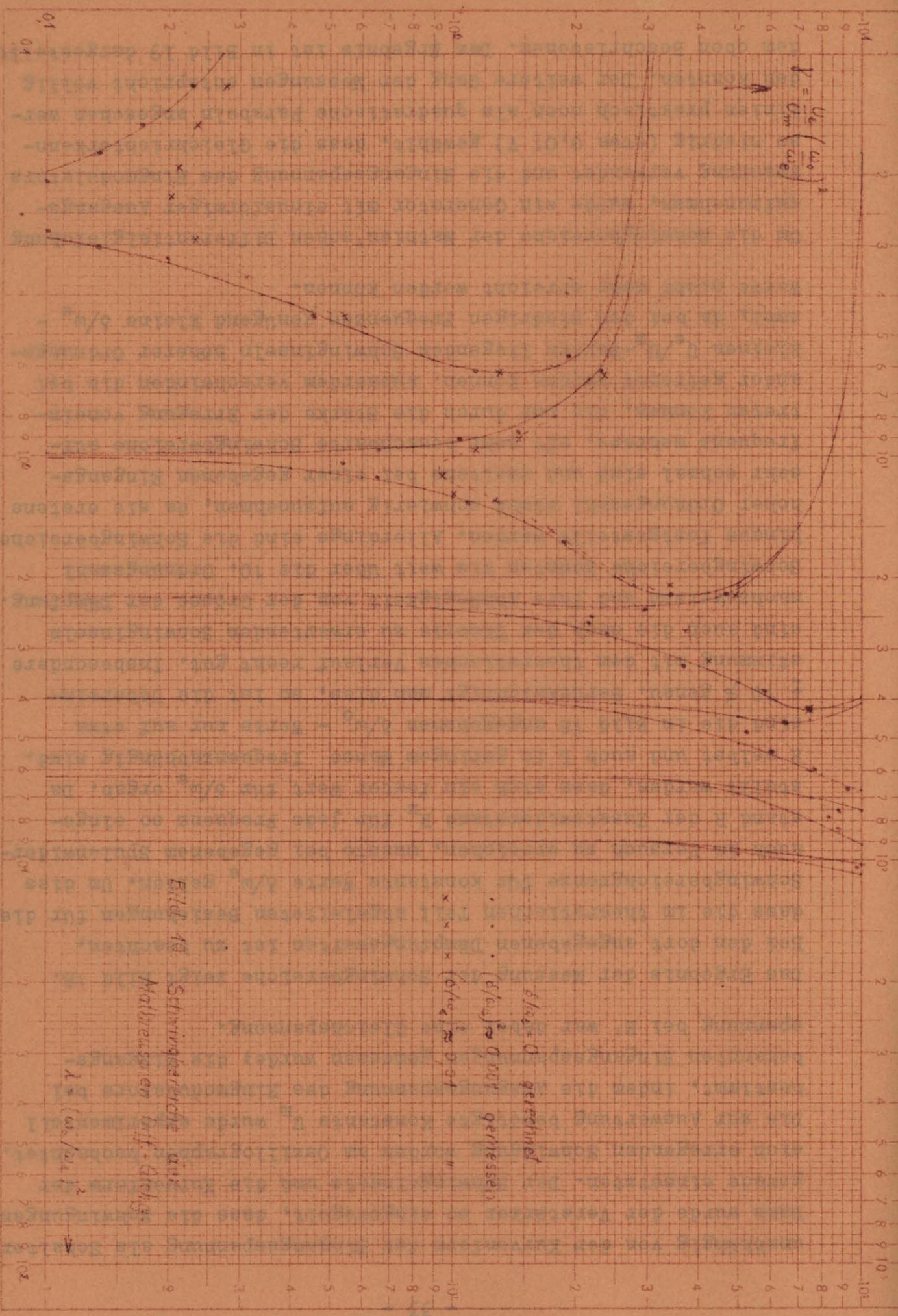


Bild 19. Schwingbreite mit
 Maßstab an $\omega_0 \cdot \Delta t$

$\delta/\omega_0 = 0$ gemessen
 $\delta/\omega_0 = 0,007$ gemessen

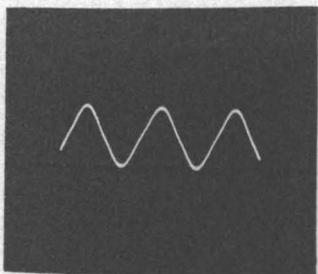
$\lambda = (\omega_0/\omega_c)^2$

Beide Achsen logarithmisch, beide in Einheiten von 100. Einheit 83,33 mm

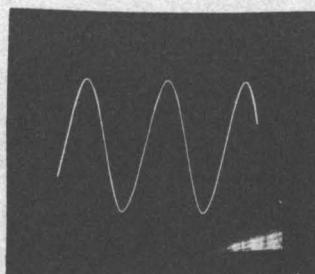
unabhängig von der Kurvenform der Eingangsspannung als Schalter. Dann wurde der Verstärker so eingeregelt, dass die Schwingungen gerade einsetzten. Der Schwingeneinsatz und die Kurvenform der sich erregenden Schwingung wurden am Oszillographen beobachtet. Die zur Auswertung benötigte Konstante U_m wurde experimentell bestimmt, indem die Ausgangsspannung des Ringmodulators bei bekannten Eingangsspannungen gemessen wurde; die Eingangsspannung bei E' war dabei eine Gleichspannung.

Das Ergebnis der Messung der Schwingbereiche zeigt Bild 18. Bei den dort angegebenen Dämpfungswerten ist zu beachten, dass die im theoretischen Teil abgeleiteten Beziehungen für die Schwingbereichsgrenze für konstante Werte δ/ω_e gelten. Um dies auch im Versuch zu erreichen, musste bei gegebenem Spulenwiderstand R der Zusatzwiderstand R_z für jede Frequenz so eingestellt werden, dass sich ein fester Wert für δ/ω_e ergab. Da R selbst und auch L in geringem Masse frequenzabhängig sind, sind die in Bild 18 angegebenen δ/ω_e - Werte nur auf etwa $\pm 10\%$ genau. Berücksichtigt man dies, so ist die Uebereinstimmung mit dem theoretischen Verlauf recht gut. Insbesondere sind auch die nach der Theorie zu erwartenden Schwinginseln nachzuweisen und Ihre Abhängigkeit von der Grösse der Dämpfung. Schwingbereiche konnten bis weit über die 10. Ordnungszahl hinaus festgestellt werden. Allerdings sind die Schwingbereiche hoher Ordnungszahl etwas schwierig aufzunehmen, da sie erstens sehr schmal sind und zweitens bei einer gegebenen Eingangsfrequenz mehrere, oft sehr benachbarte Schwingbereiche auftreten können, die nur durch die Stärke der Erregung voneinander getrennt werden können. Ausserdem verschwinden die bei kleinen U_e/U_m -Werten liegenden Schwinginseln höherer Ordnungszahl, da bei den niedrigen Frequenzen genügend kleine δ/ω_e - Werte nicht mehr erreicht werden können.

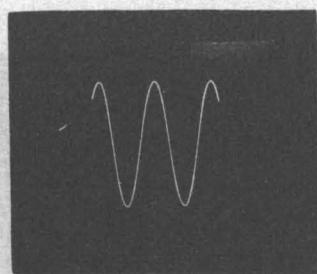
Um die Schwingbereiche der Mathieu'schen Differentialgleichung aufzunehmen, wurde ein Generator mit sinusförmiger Ausgangsspannung verwendet und die Eingangsspannung des Ringmodulators so niedrig (etwa 0,01 V) gewählt, dass die Gleichrichterkehlennlinien praktisch noch als quadratische Parabeln angesehen werden konnten. Der weitere Gang der Messungen entspricht völlig dem oben Beschriebenen. Das Ergebnis ist in Bild 19 dargestellt.



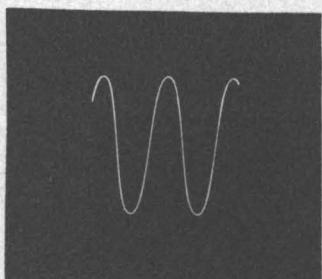
$f_e = 4000 \text{ Hz}$ $U_e/U_m = 4,3$
entspricht Lösung 1



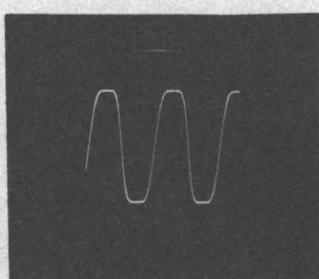
$f_e = 3000 \text{ Hz}$ $U_e/U_m = 1,85$
entspricht Lösung 1



$f_e = 2000 \text{ Hz}$ $U_e/U_m \approx 0$
entspricht Lösung 1 = Lösung 2

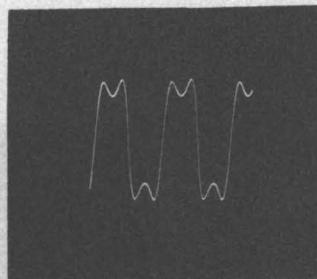


$f_e = 1600 \text{ Hz}$ $U_e/U_m = 0,62$



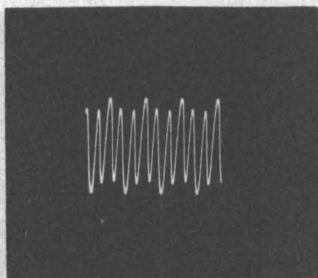
$f_e = 1410 \text{ Hz}$ $U_e/U_m = 1$

entspricht Lösung 2

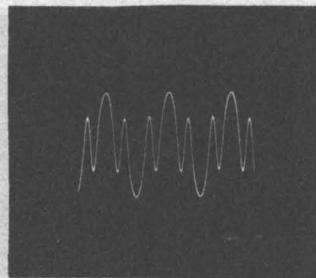


$f_e = 1320 \text{ Hz}$ $U_e/U_m = 1,5$

1. Schwingungsbereich

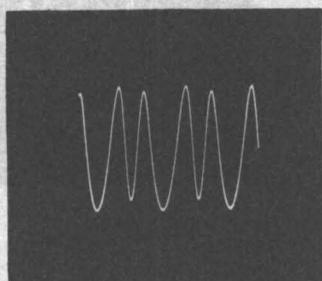


$f_e = 675 \text{ Hz}$ $U_e/U_m = 0,33$
entspricht Lösung 2

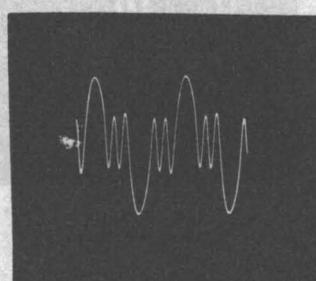


$f_e = 550 \text{ Hz}$ $U_e/U_m = 0,6$
entspricht Lösung 2

3. Schwingungsbereich



$f_e = 480 \text{ Hz}$ $U_e/U_m = 0,33$
entspricht Lösung 2

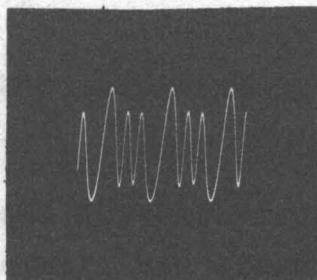
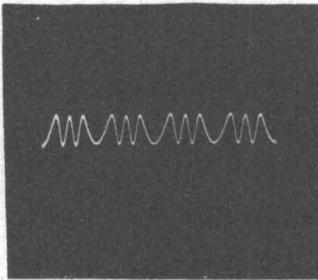


$f_e = 340 \text{ Hz}$ $U_e/U_m = 0,82$
entspricht Lösung 2
(vgl. auch Bild 11/4)

4. Schwingungsbereich

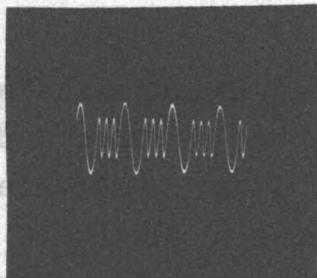
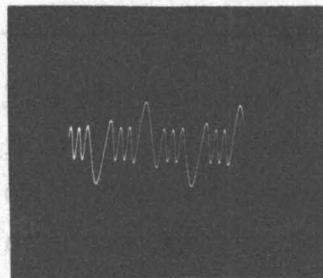
5. Schwingungsbereich

Bild 30. Oszillogramme der Ausgangsspannung der Klemmenanordnung nach Bild 17 bei Betrieb mit rechteckförmiger Eingangsspannung (Resonanzfrequenz des Filters $f_0 = 1000 \text{ Hz}$).



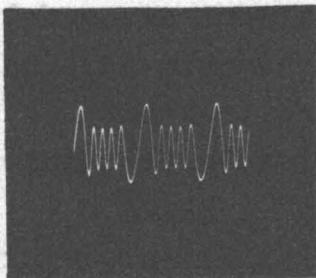
(entspricht Lösung 2, vgl. auch Bild 13/2)

(entspricht Lösung 1, vgl. auch Bild 12/2)



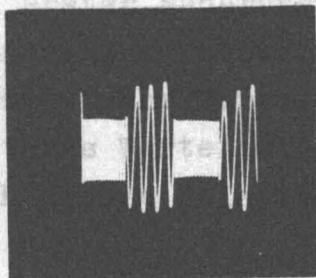
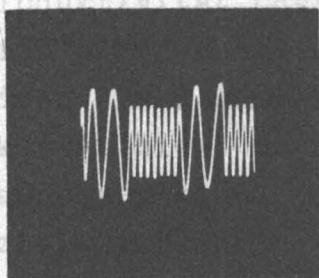
7. Schwingbereich

8. Schwingbereich



9. Schwingbereich

10. Schwingbereich



19. Schwingbereich

20. Schwingbereich

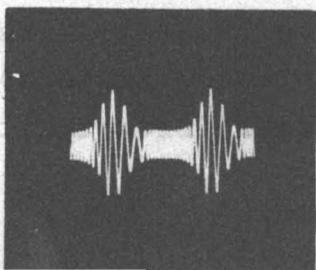


Bild 21 (nebenstehend).

Oszillogramm der Ausgangsspannung der Rückmechanordnung nach Bild 17 bei Betrieb mit sinusförmiger Eingangsspannung.

40. Schwingbereich

und zeigt ebenfalls eine gute Uebereinstimmung mit den rechnerischen Werten.

Für die experimentell beobachtete Kurvenform der Schwingungen sind in den Bildern 20 und 21 einige von einem Kathodenstrahl-oszillographen photographierte Beispiele wiedergegeben. Der oft eigenartige Verlauf wird durch die vorstehenden Rechnungen vollständig beschrieben (vgl. dazu auch die Bilder 6 - 13).

Schlussfolgerungen

Die vorstehend beschriebenen Untersuchungen gelten nicht nur für die angegebene Anordnung, bei der der niederohmige Ausgang des Ringmodulators eine Reihenschaltung von L und C speiste, sondern wegen der Dualität der Schaltungen auch für den Fall, dass als Mischorgan eine Elektronenröhre verwendet wird, in deren Anodenkreis, wie üblich, ein Parallelresonanzkreis liegt.

Verwendet man das Rückmischverfahren in Schwingbereichen höherer Ordnung, so kann mit ihm eine Frequenzmodulation durchgeführt werden. Die Gleichung (4) kann nämlich auch so aufgefasst werden, als ob die Schwingkreisinduktivität L oder die Kapazität C mit dem Faktor $1/(1 + u_e(t)/U_m)$ gesteuert würde. Das entspricht also einem Schwingkreis mit zeitlich veränderbarer Induktivität oder Kapazität. Die rechnerische Behandlung dieser Anordnungen führt bei kleinen sinusförmigen Änderungen der Induktivität oder Kapazität in erster Näherung bekanntlich ebenfalls auf Mathieu'sche Funktionen. Zum Unterschied ist hier jedoch die Lösung exakt eine Mathieu'sche Funktion, und ausserdem können hier, da u_e/U_m ohne weiteres Werte zwischen + 1 und - 1 annehmen kann, ausserordentlich grosse relative Frequenzhübe erzielt werden.

Die durchgeführten Versuche zeigen ferner, dass das Rückmischverfahren geeignet ist, den Schwingungsverlauf und die Stabilitätsbereiche der genannten Differentialgleichungen mit einfachen Mitteln und mit guter Genauigkeit zu bestimmen. Das Verfahren ist indessen nicht nur auf diese beiden Fälle beschränkt, sondern kann auch auf viele andere verwandte Differentialgleichungen angewandt werden, wenn statt des

einfachen L-C-Gliedes andere Filteranordnungen benutzt werden. Ohne im einzelnen hierauf einzugehen, soll nur erwähnt werden, dass eine Anzahl anderer Netzwerke, die auf z.T. wesentlich kompliziertere Differentialgleichungen führten, experimentell untersucht wurde und ein ähnliches Verhalten wie die vorher beschriebenen Anordnungen zeigte.

Das Verfahren scheint von besonderem Interesse für das Gebiet der mechanischen Schwingungen zu sein, da dort Stabilitätsuntersuchungen eine grosse Rolle spielen. Es ist dann nur nötig, das mechanische Schwingungssystem in ein äquivalentes elektrisches umzuwandeln, was bekannt ist [12]. Von besonderer Bedeutung dürfte sein, dass nicht nur die statischen Vorgänge, also die rein periodischen Lösungen der Differentialgleichungen, sondern vor allem auch Einschalt- und Anlaufvorgänge oszillographisch leicht gewonnen werden können, da Amplitude und Frequenz des Generators ohne Schwierigkeit in ihrem zeitlichen Verlauf beliebig geändert werden können. Da auch die Kurvenform der Eingangsspannung in gewissen Grenzen beliebig gewählt werden kann, eignet sich die beschriebene Anordnung auch zur Untersuchung der viel allgemeineren Hill'schen Differentialgleichung $\frac{d^2 y}{dx^2} + \phi(x) \cdot y = 0$. Im Vergleich zu anderen Analogrechnern, die bisher für diese Aufgabe benutzt wurden, die allerdings auch viele andere Rechenoperationen durchführen können, ist der Aufwand hier äusserst klein.

Herrn Prof. Gundlach danke ich für den Hinweis, das Rückmischverfahren auf die beschriebene Weise rechnerisch zu behandeln.

Schrifttum

- [1] R.L. MILLER Fractional frequency generators utilizing regenerative modulation, Proc. I.R.E. 27 (1939), 446 - 457.
- [2] R.L. FORTESCUE Quasistable frequency dividing circuits, Journ. I.E.E. 84 (1939) 693 - 698.
- [3] J. GROSSKOPF Frequenzteilung, Fernmeldet. Zeitschr. 1 (1948), 113 - 119.
- [4] P. THIESSEN Beitrag zum Problem der Frequenzteilung, Hausmitteilungen des NWDR 7 (1955), 77 - 87 und 101 - 110.
- [5] K. KLOTTER Technische Schwingungslehre, Springer 1951, Bd. 1, S. 350 - 376.
- [6] J.P. DEN HARTOG Mechanical Vibrations, 4. Aufl. S. 343 - 347, Mc Graw-Hill.
- [7] M.J.O. STRUTT Lamésche, Mathiesche und verwandte Funktionen in Physik und Technik, Springer Berlin 1932.
- [8] N.W. Mc LACHLAN Theory and Application of Mathieu Functions, Oxford, Clarendon Press.
- [9] E. MEISSNER Schweiz. Bauztg., Bd. 72 (1918) S. 95 ff.
- [10] O. HAUPT Ueber lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten, Math. Ann. Bd. 79 (1919), S. 278 - 285.
- [11] G. KOTOWSKI Z. Angew. Math. Mech., Bd. 23 (1943), S. 226 ff.
- [12] K. KLOTTER Die Analogie zwischen elektrischen und mechanischen Schwingungen, Ing. Archiv 18 (1950), S. 291 - 301.

A n h a n g

Zur zahlenmässigen Berechnung der kleinsten Werte von U_e/U_m , bei denen sich mit Berücksichtigung der Dämpfung gerade noch Schwingungen erregen können, bzw. des grössten Wertes, bei dem sie wieder aussetzen, formt man Gl. (35) zweckmässig etwas um. Führt man als neuen Parameter $m = p'/n' - 1$ ein, so lässt sich diese Gleichung in der Form schreiben

$$\frac{4(m+1)}{(m+2)^2} \sin 2d \pm \left[\frac{m^2}{(m+2)^2} \cos mv - \cos(m+2)v \right] = 0. \quad (38)$$

Während es im allgemeinen in jedem Schwingbereich für ein gegebenes U_e/U_m zwei verschiedene Wertepaare p' , n' gibt, die die Gleichung (35) erfüllen, fallen diese beiden Lösungen im tiefsten Punkt von U_e/U_m zusammen. Dabei wird gleichzeitig das Verhältnis p'/n' und damit auch m ein Minimum. Durch Differentiation von (38) folgt für diese Punkte die Beziehung

$$\frac{\sin(m+2)v}{\sin mv} = \frac{m^3}{(m+2)^3} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^3. \quad (39)$$

In der Nähe der Tiefpunkte ist m klein; daher ist $(m+2)v \approx 0, \pi, 2\pi \dots$. Setzt man dies in Gleichung (38) ein, so kann man m bei angenommenem d leicht berechnen. Daraus folgt sofort p' und n' und damit die Koordinaten des Tiefpunktes - genauer gesagt des Tiefpunktes für kleinstes U_e/U_m - des betreffenden Schwingbereiches. Bei grösserem m muss die allgemeine Beziehung (39) verwendet werden.